

O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná

What saith the paranaenses productions as the teaching of non-Euclidean geometries from the publication of the Curriculum Guidelines of Paraná State Education

Viviane Aparecida Bagio¹

Resumo

Este artigo tem por finalidade apresentar as pesquisas realizadas pelos Programas de Pós-Graduação de universidades públicas do estado do Paraná e que contemplam, na área da Matemática, o conteúdo de geometrias não euclidianas. Esses estudos foram realizados entre 2009 e 2014 e seu principal motivador foi a partir da inclusão desse conteúdo nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, publicadas em 2008. Apresentamos os trabalhos que comportam essa temática com relação às realidades encontradas e possibilidades para o ensino desses conteúdos. O que se pode concluir é que grande parte dos professores que não participou dos cursos ofertados ainda se sente insegura para ensinar esse tema e que a inclusão do conteúdo nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná não foi coletiva como se diz, mas passou por um “convencimento” dos professores, de que era importante, especialmente, no caso das geometrias não euclidianas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná. Geometrias não euclidianas.

1 Introdução

As Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná (DCE/PR) foram publicadas em 2008 e, com isso, iniciou-se um grande movimento por toda educação paranaense. Nessa versão de Diretrizes, um novo conteúdo foi inserido na disciplina de Matemática: as geometrias não euclidianas². O assunto não aparecia, anteriormente, de forma explícita em outros documentos (utilizados pela

¹ Mestre em Educação em Ciências e em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Bacharela e licenciada em Matemática pela mesma universidade. Professora colaboradora do Departamento de Pedagogia da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). E-mail: vivibagio@gmail.com.

² Utilizaremos o termo geometrias não euclidianas, mas mantemos as escritas utilizadas por outros autores nas citações que serão apresentadas.

rede de ensino público do Paraná), mas sua inserção provocou diversas ações de implementação desta proposta curricular, dentre elas, a produção de artigos pelos professores (os Objetos de Aprendizagem Colaborativa³ (OAC) e o Projeto Folhas⁴) e a realização de oficinas pela Equipe Técnica da Secretaria Estadual de Educação (SEED/PR). Essas oficinas tratavam especificamente dos conteúdos relacionados às geometrias não euclidianas: geometria topológica, geometria esférica, geometria hiperbólica, geometria fractal e geometria projetiva.

Desta forma, com a publicação das DCE/PR e as atividades envolvendo os professores, iniciaram-se as pesquisas de alunos de programas de pós-graduação envolvendo esses conteúdos. Nosso objeto de estudo, nesse artigo, é analisar o que essas pesquisas contemplam. Elas abordam desde assuntos envolvendo a inserção do conteúdo até a proposta de atividades sobre as geometrias não euclidianas.

2 Geometrias não euclidianas

Por geometria não euclidiana consideramos aquela(s) que invalida(m) ou desconsidera(m) um dos postulados de Euclides. A geometria euclidiana é considerada a primeira axiomatização da Matemática, publicada por volta de 300 a.C. São 13 livros, que compõem a obra “Os Elementos”. No livro I temos 23 definições, 34 teoremas, 14 problemas, 1 corolário, 5 postulados e 5 axiomas. (LANCON, 1991). Os postulados de Euclides são:

- I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente sobre uma reta.
- III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Nota-se que o V postulado possui um enunciado cuja compreensão não é imediata como os anteriores. Sendo assim, durante muito tempo, esse foi objeto

³ Mais informações em Bagio (2014, p.113-122).

⁴ Mais informações em Bagio (2014, p.122-133).

de estudo, pois diversos matemáticos procuravam demonstrar que ele poderia ser derivado dos demais, podendo ser tratado como um teorema. No entanto, alguns matemáticos procuraram reescrevê-lo, como por exemplo, John Playfair em 1745: Postulado das Paralelas: “*Por um ponto P exterior a uma reta m , considerada em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta m .*” (COUTINHO, 2001, p. 35, grifos do original).

Segundo as DCE/PR, no início do século XIX, com os estudos de matemáticos como Bolyai, Lobachevski, Riemann e Gauss foi possível o surgimento das geometrias não euclidianas, proporcionando uma maneira diferenciada de ver e conceber o que se entendia por conhecimento geométrico. Até o final do século XVIII a única geometria aceita e transmitida era a euclidiana, e com os estudos e publicações desses matemáticos se compreendeu que

Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas *geometrias não-euclidianas*. Um exemplo são os estudos que resultaram na *Teoria da Relatividade*, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma *geometria não-euclidiana*, de modo que conceitos, como “a luz se propaga ao longo de geodésias e a curvatura do espaço é determinada pela natureza da matéria que o preenche” (COURANT & ROBBINS⁵, 2000, p. 276), foram fundamentais. (PARANÁ, 2008, p. 55-56, grifos do original).

No Ensino Fundamental, segundo o documento das DCE/PR sobre o tema de geometrias não euclidianas o aluno deve compreender: “geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais”. (PARANÁ, 2008, p. 56).

No Ensino Médio, as noções de geometrias não euclidianas são aprofundadas, especialmente com relação aos conteúdos que podem ser relacionados às geometrias fractal, projetiva, hiperbólica e elíptica. No caso da geometria fractal, o documento exemplifica que podem ser explorados fractais como a curva e o floco de neve de Koch e o triângulo e tapete de Sierpinski, pois a partir desses o aluno poderá “refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através

⁵ COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

da regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades” (PARANÁ, 2008, p. 56). Com relação aos conhecimentos relacionados à geometria hiperbólica a proposta é partir do postulado de Lobachevsky. Para a fundamentação da geometria elíptica (ou esférica) o documento propõe uma abordagem histórica com a apresentação do postulado de Riemann e também discutir diversos conceitos relativos a essa geometria, como por exemplo, círculos máximos e círculos menores, distância na superfície esférica, ângulo esférico, triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos (PARANÁ, 2008, p. 56). Além disso, o documento afirma que as possibilidades de abordagem das geometrias fractal, hiperbólica e elíptica:

[...] não se encerram, unicamente, nos conteúdos aqui elencados. Desde que explore conceitos básicos, o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens. Os conceitos destes conteúdos são fundamentais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico. (PARANÁ, 2008, p. 56).

3 As pesquisas envolvendo as geometrias não euclidianas

As buscas por pesquisas que envolveram esse conteúdo se concentraram nas produções das universidades públicas do Estado do Paraná especificamente e, serão apresentadas não somente as que tratam do conteúdo como também aquelas que tratam de uma Geometria específica que possa estar proposta nas DCE/PR.

O procedimento utilizado na elaboração desse estudo foi a pesquisa exploratória, que assumiu a forma de uma pesquisa bibliográfica, após a elaboração de um levantamento onde foram descritos os estudos realizados envolvendo os conceitos de geometrias não euclidianas. Segundo Gil (2002, p. 59-60), a pesquisa bibliográfica pode ser entendida como um processo que envolve as seguintes etapas: escolha do tema, levantamento bibliográfico preliminar, formulação do problema, elaboração do plano provisório de assunto, busca das fontes, leitura do material, fichamento, organização lógica do assunto e redação do texto. Os trabalhos encontrados foram produzidos em nível de

O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná

mestrado (M), mestrado profissional (MP) e doutorado (D). Na tabela abaixo, apresentamos as treze pesquisas encontradas, onde quatro destas abordam algum conteúdo específico relacionado ao tema:

Tabela 1: As pesquisas envolvendo as Geometrias Não Euclidianas publicadas após as DCE

(continua)

AUTOR	INSTITUIÇÃO	ANO	TÍTULO	NÍVEL	ORIENTADOR
Karla Aparecida Lovis	UEM	2009	Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores	M	Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Talita Secorum dos Santos	UEM	2009	A inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no currículo da Educação Básica	M	Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Claudia Vanessa Cavichiolo	UFPR	2011	Geometrias Não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: o que dizem os formadores	M	Prof. ^a Dr. ^a Maria Tereza Carneiro Soares
Línya Natássia S. C. de Barbosa	UEL	2011	Uma reconstrução histórico filosófica do surgimento das Geometrias Não Euclidianas	M	Prof. Dr. Marcos Rodrigues da Silva
Luciano Ferreira	UEM	2011	Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: "construção do plano de Poincaré" com o uso do software Geogebra	M	Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Marlova Estella Caldato	UEM	2011	O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Não Euclidianas e a inserção das Geometrias Não Euclidianas	M	Prof. ^a Dr. ^a Regina Maria Pavanello
Francielli Aparecida Rocha de Carli	UEM	2012	A aprendizagem de geometrias não Euclidianas: um estudo realizado com professores da rede	M	Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco

		pública de ensino			
(conclusão)					
AUTOR	INSTITUIÇÃO	ANO	TÍTULO	NÍVEL	ORIENTADOR
Alceu Sérgio Pereira	UEL	2012	Fractais Circulares: algumas considerações e atividades	MP	Prof. ^a Dr. ^a Luci Haue Fatori
Keilla C. Arsie de Camargo	UFPR	2012	A Expressão Gráfica e o ensino das Geometrias Não Euclidianas	M	Prof. ^a Dr. ^a Simone da Silva Soria Medina
Idelmar André Zanella	UEL	2013	Geometria Esférica: proposta de atividades com aplicações	MP	Prof. ^a Dr. ^a Ana Lúcia da Silva
Karla Aparecida Lovis	UEM	2013	As concepções de Geometrias de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica	D	Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Simone Semmer	UTFPR – Ponta Grossa	2013	Ensino de geometrias não-euclidianas usando arte e matemática	MP	Prof. ^a Dr. ^a Sani de Carvalho Rutz da Silva
Viviane Aparecida Bagio	UFPR	2014	Da escrita à implementação das DCE/PR: um retrato feito a cinco vozes e milhares de mãos	M	Prof. Dr. Emerson Rolkouski

Fonte: A Autora (2015)

Como podemos observar na tabela acima, os primeiros (e o maior número de) trabalhos envolvendo as Geometrias Não Euclidianas foram publicados pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Na sequência, passaremos a descrever em amplitude geral os trabalhos publicados que se referem ao tema.

Santos (2009) realizou uma análise das reações dos professores das escolas públicas frente à inclusão do conteúdo de Geometrias Não Euclidianas. Inicialmente, os professores declararam que não se sentiram preparados para o ensino deste conteúdo. Sendo assim, foi realizado um curso com duração de seis encontros⁶, com 50 professores envolvendo esse tema, no ano de 2008. Durante o curso, a pesquisadora utilizou sete questionários com os participantes. Dentre

⁶ Os conteúdos tratados nos encontros foram: conceitos sobre Geometria Euclidiana, topologia, geometria projetiva (seu histórico e sua ligação com a arte e construção matemática), apresentação da geometria hiperbólica, esférica e fractal.

as perguntas dos questionários entregues, os professores foram convidados a escrever uma justificativa para a inclusão do conteúdo de geometrias não euclidianas nas DCE/PR, as diferenças entre esse conteúdo e a geometria euclidiana, as explicações que os professores dariam para o aluno que teve a impressão de que as retas paralelas se encontram no infinito, a importância de se trabalhar os conceitos à geometria não euclidiana na Educação Básica e as dificuldades de entendimento durante o uso desse assunto no curso ministrado. As respostas obtidas a partir dos questionários evidenciaram que existe certo despreparo e compreensão desse conteúdo, uma vez que, os professores tenderam a considerar a Geometria Euclidiana como estritamente restrita ao plano. A autora conclui seu trabalho afirmando que ao questionar os professores sobre as razões da inclusão do conteúdo de geometrias não euclidianas, apareceram algumas críticas, e ainda:

[...] algumas respostas vagas de professores que tentavam justificar a inclusão de um conteúdo que não conheciam, ou conheciam muito pouco. Houve, no entanto, professores que afirmaram ter participado das discussões sobre a inclusão e que mostraram acreditar na importância da inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica. (SANTOS, 2009, p. 122).

Caldatto (2011), por sua vez, realizou um trabalho sobre o processo de escrita das DCE/PR e a inserção das geometrias não euclidianas neste documento. Durante seu estudo a pesquisadora tratou de documentos curriculares anteriores⁷ às DCE/PR e também de algumas versões preliminares desse documento. Posteriormente realizou 15 entrevistas com professores da Educação Básica que participaram dessa construção coletiva do documento, assim como professores ligados à Equipe Técnica da SEED. Segundo suas análises, o documento das DCE/PR é dito elaborado de forma coletiva com a participação dos professores da rede básica, e a inserção desse conteúdo:

[...] evidencia o equilíbrio de forças existente no processo de elaboração desse documento curricular. Fica evidente ter havido apenas um processo de convencimento dos professores da importância genérica da inserção desse conhecimento no currículo sem uma discussão efetiva sobre o que são essas

⁷ Nesse caso, o Currículo Básico do Estado do Paraná e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

geometrias e as implicações do seu conhecimento para a formação dos alunos. Não importava se os professores, em sua maioria, fossem contrários a essa inserção devido às adversidades que a escola, principalmente a pública, é obrigada a superar, nem se eles conheciam ou não o tema. O que importava era que aceitassem essa inclusão para corroborar o discurso da SEED sobre a construção coletiva das DCEs. (CALDATTO, 2011, p. 228).

A pesquisadora realizou também um levantamento sobre o ensino desta disciplina nas universidades do Paraná que possuem o curso de licenciatura em Matemática a fim de contemplar o ensino desse tema nos cursos de graduação. Diante de todas suas pesquisas, a autora finaliza sua dissertação afirmando que existe um vilão na inclusão do conteúdo nas DCE/PR e que, apesar de se haver a impressão de que a SEED/PR seria esse, pode-se entender “que esse papel é desempenhado pela Licenciatura em Matemática, que não proporciona aos professores a formação necessária para uma atitude crítica e ativa diante de qualquer situação que envolva questões educacionais”. (CALDATTO, 2011, p. 249).

Bagio (2014) realizou uma pesquisa a partir das pessoas que participaram ativamente do processo de implementação e também de escrita das DCE/PR. Ela realizou uma análise dos documentos anteriores às DCE/PR e de algumas versões preliminares). Assim como Caldatto (2011), a autora afirma que não se pode afirmar que os professores tiveram participação direta na escrita do documento, mas que:

[...] estiveram envolvidos nas discussões e na formação continuada em relação aos conteúdos da grade básica proposta e em especial, as Geometrias Não Euclidianas como mais um conteúdo. Nas versões preliminares (especialmente as do ano 2005) notava-se uma linguagem não acadêmica e, nos primeiros anos das discussões não existiam consultores. [...] Finalmente, as últimas versões já possuem linguagem acadêmica e muito distante das primeiras versões [...]. (BAGIO, 2014, p. 242).

Sobre a implementação realizada na área de Matemática, podemos observar que esta “proporcionou uma aproximação da SEED com a escola além de promover as discussões, encontros e oficinas”. (BAGIO, 2014, p. 244). Os relatos dos depoentes mostram que as oficinas que foram realizadas no chamado DEB-Itinerante (projeto no qual as equipes da SEED iam às escolas proferir

palestras), na área de Matemática estas tinham duração de dezesseis horas, tinham como foco o conteúdo de geometrias não euclidianas e eram realizadas nos Núcleos Regionais de Educação (NRE). Segundo os entrevistados, as oficinas eram divididas em quatro horas destinadas para cada geometria não euclidiana: fractal (na qual eram realizadas construções e elaboração de materiais como, por exemplo, o triângulo de Sierpinski), topológica, projetiva e esférica (envolvendo o trabalho com o globo terrestre). A geometria hiperbólica era trabalhada em conjunto com a geometria esférica por serem opostas em relação a seus postulados. A pesquisadora conclui que a abordagem pode ter instigado os professores participantes das oficinas que o conteúdo de geometrias não euclidianas deveria ser tratado de forma “rotineira” como qualquer outro, mas que deve ser utilizado com cautela, uma vez que, ele seria uma ponte interdisciplinar:

[...] não devemos esconder as Geometrias Não Euclidianas, entretanto não devemos expô-las a um julgamento que pressuponha “mais” um conteúdo da Matemática que não se aplica no dia-a-dia e que é somente objeto de uma lista de conteúdos. Esse assunto é muito mais que isso: é ponte para diversas ligações entre disciplinas (Geometria, Arte, Biologia, etc.) e entre os próprios conteúdos da matemática (articular geometria e álgebra, geometria e tratamento da informação, etc.) e que está presente em nossa vida, em nosso cotidiano. Resta-nos cautela: estudá-lo e torná-lo realidade dos nossos professores para então levá-lo aos alunos com a qualidade que eles merecem e não como mais um na grade curricular. (BAGIO, 2014, p. 248).

Lovis (2009) em sua dissertação realizou um trabalho envolvendo a Geometria Euclidiana e Hiperbólica a partir do software Geogebra⁸. A pesquisadora realizou um minicurso com duração de dezesseis horas, oferecido a professores da rede estadual do Núcleo Regional de Educação de Maringá/PR. O objetivo do minicurso foi a construção do modelo de Poincaré para a Geometria Hiperbólica a partir do software. Seu trabalho procurou averiguar os conhecimentos de um grupo de professores sobre essas duas geometrias, pois, segundo ela, apesar da importância da abordagem do conteúdo de geometrias não euclidianas, percebeu-se um abandono da geometria euclidiana nas últimas décadas. E a autora apresenta vários motivos alegados pelos professores com

⁸ O GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica gratuito. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>> Acesso em: 23 jun. 2015.

relação à geometria euclidiana, dentre eles: “a insegurança e o despreparo dos professores, que alegam não ter conhecimento suficiente do assunto devido a sua má formação acadêmica, a falta de tempo [...], pois na maioria das vezes o ensino de Geometria é deixado para o final do ano letivo” (LOVIS, 2009, p.14).

Ao questionar os professores sobre o ensino das geometrias não euclidianas, percebe-se que o contexto piora, uma vez que esse tópico muitas vezes não é abordado “nos cursos de formação de professores de Matemática e a falta de conhecimento por parte dos professores é ainda maior do que da Geometria Euclidiana” (LOVIS, 2009, p.14). No entanto, quando se procura evidenciar a existência dessas Geometrias percebe-se um sentimento de desconfiança por parte dos professores, porque para alguns, o máximo que aprenderam foi a geometria euclidiana e para muitos outros essa é a única geometria existente. Desta forma, esse pressuposto “pode gerar certas dificuldades, resistências e até mesmo obstáculos epistemológicos que impedem e dificultam o aprendizado dessas Geometrias”. (LOVIS, 2009, p.14). Ainda segundo esse estudo, somente por meio de uma formação adequada e continuada os professores conseguirão compreender e ensinar o conteúdo de Geometrias com qualidade.

Com relação ao conteúdo de geometrias não euclidianas, a pesquisadora afirma que são pouco abordados nos cursos de formação de professores de Matemática e que grande parte dos livros didáticos (principal recurso utilizados pelos professores em suas aulas) não apresenta conteúdos relacionados ao ensino desse tipo de Geometria. Por fim, ela afirma que a maior dificuldade para “o entendimento da Geometria Hiperbólica foi o desconhecimento de conceitos e resultados da Geometria Euclidiana, bem como os conceitos e propriedades”. (LOVIS, 2009, p. 134).

Em sua tese de doutorado Lovis (2013) trabalhou com as concepções de 27 professores de Matemática sobre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas. Inicialmente, a autora tece algumas considerações sobre o conceito de concepções na Educação Matemática, concepções sobre conhecimentos,

opiniões e ideias sobre geometria euclidiana. Depois, trata dos procedimentos metodológicos da pesquisa: foram realizadas entrevistas com um professor de cada NRE do estado e, estas eram compostas de um questionário, uma entrevista semiestruturada e 36 cartões envolvendo as geometrias não euclidianas. Na análise dos dados foram criadas quatro categorias: os sujeitos da pesquisa e sua relação com as geometrias não euclidianas; concepções sobre geometria euclidiana; concepções sobre geometria não euclidiana; concepções sobre a importância das geometrias. Nessa análise, a autora afirma que no caso da geometria fractal muitos professores passaram a conhecê-la por causa das DCE/PR. Nas entrevistas, essa geometria foi a mais citada pelos professores e, em segundo lugar a geometria esférica. Para ela, apesar de muitos professores afirmarem que estudaram os conceitos e tópicos relacionados às geometrias não euclidianas, o que ocorre é que não se construiu uma concepção a respeito.

Para a autora é preciso “repensar a formação universitária e a formação continuada”, pois acredita-se que a falta de compreensão dessas geometrias está relacionada à fraca formação que os professores têm recebido sobre o tema, e também porque “em geral, os cursos e as leituras a que os professores tiveram acesso ainda não contribuíram para quebrar/instaurar novas concepções e reflexões acerca do conhecimento geométrico” (LOVIS, 2013, p. 95-96). Para justificar a importância da formação de professores (inicial e continuada) nas geometrias não euclidianas, a pesquisadora conclui que não se possuem as condições de encontrar as soluções para os problemas e dificuldades que têm aparecido no ensino dessas geometrias porque os professores não estão preparados, e por isso, se sentem inseguros.

Por fim, a autora relata que a inclusão das geometrias não euclidianas nas DCE/PR proporcionou reflexões sobre o ensino desse conteúdo, assim como preocupação em buscar conhecer o assunto e práticas associadas a ele. No entanto, “o estudo das Geometrias não Euclidianas pode ter causado abalos e instabilidades no entendimento da própria Geometria Euclidiana”. (LOVIS, 2013, p. 180). Segundo ela,

Se desejarmos mudanças nas concepções dos professores, será necessário que eles possam perceber e analisar as concepções que norteiam suas atividades, sejam elas conscientes ou não. [...] Diante do exposto e dos dados obtidos nesta investigação, acredita-se que identificar, descrever e analisar as concepções dos professores é uma condição indispensável para transformar o cenário do ensino de Geometrias. (LOVIS, 2013, p. 183).

Ferreira (2011) realizou um estudo sobre o ensino de geometria hiperbólica com o software Geogebra. Seu objetivo foi identificar possíveis obstáculos que aparecem durante a construção do modelo de Poincaré nesse software. O pesquisador realizou uma revisão teórica a respeito das geometrias não euclidianas, bem como sobre a teoria antropológica do didático e obstáculos didáticos. Apresentou ainda as atividades propostas (19 no total) e o relato dos professores (a partir de oito fichas entregues na qual se discorria livremente: finito, infinito, limitado, ilimitado, distância, geometria euclidiana, geometria não euclidiana, geometria hiperbólica) do minicurso realizado sobre o tema com os 17 professores participantes. O autor conclui que a escolha do trabalho visando uma organização didática com a finalidade de discutir o ensino introdutório de Geometria Hiperbólica em um ambiente computacional por considerar que a maior parte das escolas públicas paranaenses possui laboratório de informática e, nos computadores está instalado o Geogebra, que é livre e com os comandos em português. Além disso, a escolha do tema levou em consideração a proposta de “atender professores, no que diz respeito a uma capacitação mais geral, fez-se necessário um resgate histórico, pois acreditamos que para a formação do professor de Matemática a História é essencial”. (FERREIRA, 2011, p. 220).

Zanella (2013) por sua vez, realizou um estudo sobre a geometria esférica com a proposta de apresentar algumas atividades com aplicações desta Geometria. Seu estudo focou este tema, pois segundo ele, apesar de estar indicado no documento das DCE/PR, ele ainda não está presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, estes que são os principais recursos didáticos utilizados pelos professores:

O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná

[...] um estudo detalhado⁹ com doze coleções de livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio no Brasil, verificou-se que é dado tratamento à Geometria Plana e Espacial e à Geometria Analítica. Porém, não há evidências do tratamento às geometrias não-euclidianas, em específico, à Geometria Esférica, o que justifica a escolha deste tema. (ZANELLA, 2013, p.14)

Esse autor realizou em sua dissertação um estudo sobre a descoberta das geometrias não euclidianas, o 5º postulado de Euclides bem como, as tentativas de demonstração do mesmo. Posteriormente, realizou uma introdução sobre a geometria esférica e propôs três aplicações: na superfície esférica, na fórmula para triângulos esféricos e no funcionamento do GPS (*Global Positioning System* – Sistema de Posicionamento Global). O autor conclui seu trabalho afirmando que nenhuma geometria é melhor ou mais importante que outra, mas que cada uma se adequa e descreve melhor um determinado contexto, realidade ou objeto, uma vez que, para muitas profissões (como pedreiro, arquitetos, engenheiros etc.) a geometria euclidiana é suficiente, mas que para outras como “o piloto de um avião ou o capitão de um navio nas suas viagens a geometria que mais se usa é a Geometria Esférica”. (ZANELLA, 2013, p. 120)

Pereira (2013) tomou como base para seu estudo a Geometria Fractal e, nela os fractais circulares tecendo algumas considerações e aplicações desse conteúdo. Segundo o autor, a escolha desse conteúdo se fez em razão de existirem poucas referências sobre esse tipo de fractal. O autor apresenta o software Geogebra que servirá de base nas construções que serão realizadas, um histórico sobre os fractais (suas características e a dimensão fractal) e a proposta das atividades envolvendo os fractais circulares. As atividades propostas incluem quatro tipos de fractais circulares¹⁰. Segundo ele, a partir das atividades que foram propostas foi possível a retomada de conceitos relativos à geometria euclidiana e, desta realizar a transposição para a geometria fractal, pois atividades que podem ser realizadas por meio de softwares, como é o caso do

⁹ Esse estudo se refere a: LIMA, E. L. *et al.* **Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

¹⁰ São apresentadas atividades – construção no Geogebra, tabela com a análise das iterações realizadas no computador e questionamentos envolvendo as generalizações das construções – para quatro fractais circulares: tetracirculo, circular tipo Dürer, circuntexto a antenna fractal.

uso do Geogebra, propiciam “aulas mais atraentes nas quais o professor deve ter o domínio dos assuntos envolvidos, pois durante o desenvolver das atividades muitos questionamentos podem surgir”. (PEREIRA, 2013, p. 71-72).

Barbosa (2011) estudou as geometrias não euclidianas a partir de uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento desse conteúdo. A autora apresenta a participação da história da Matemática no ensino e no currículo, referências ao quinto postulado de Euclides como uma história de problemas (suas tentativas de demonstração e de equivalência entre os postulados) e tece algumas considerações filosóficas a respeito do tema, comentando as dificuldades da participação da história no ensino da Matemática em livros didáticos ou nas aulas. Segundo ela, a reconstrução histórico-filosófica realizada sobre o surgimento das geometrias não euclidianas procurou contemplar tanto os que negavam a possibilidade da existência de geometrias diferentes da euclidiana como os que aceitaram. A geometria euclidiana deixou de ser a única verdade quando os matemáticos aceitaram o fato de que o quinto postulado de Euclides (postulado das retas paralelas) poderia ser aceito ou negado. “Assim, geometrias muito diferentes da euclidiana se tornaram possíveis e com a mesma consistência, isto é, se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria não euclidiana também será”. (BARBOASA, 2011, p. 55).

Semmer (2013) apresentou um estudo sobre o ensino das geometrias não euclidianas usando a Arte e a Matemática. A autora realizou uma revisão de literatura sobre o assunto num contexto geral e no ensino da Matemática. De forma específica, apresenta um referencial sobre o ensino de geometria com representações semióticas, o ensino da arte por meio da metodologia triangular, a geometria na Arte e a perspectiva tanto na área artística como na Matemática. A autora apresenta ainda as sequências de atividades apresentadas numa oficina com 53 alunos do 2º ano do Ensino Médio. Nesta oficina houve o trabalhado com cinco objetos artesanais¹¹ e, ainda a cobertura de sólidos geométricos e superfícies curvas. Na sequência, Semmer (2013) apresenta os relatos das

¹¹ Os objetos artesanais são: bordado em ponto de cruz, toalha de crochê, cerâmica, bola de cipó e pêsanka.

discussões sobre os triângulos e trapézios em diversas superfícies (plana, oval, cilíndrica e esférica). Segundo a autora, é importante ressaltar que “as dificuldades de interpretação do conhecimento de geometrias não euclidianas, que, particularmente, não fizeram parte da formação matemática inicial, e que, neste momento do estudo foram apenas estudadas mediante a literatura disponível”. (SEMMER, 2013, p. 204). Como produção didática do mestrado profissional, foi criado um material didático que pode ser utilizado por professores das áreas “de Matemática e Arte, intitulado “O Ensino de Arte e Matemática: abordagens geométricas” que aborda, explica e sugere atividades envolvendo anamorfose e representações geométricas, em diversas superfícies”. (SEMMER, 2013, p. 205).

Assim como Semmer (2013), o estudo de Camargo (2012) produziu um trabalho envolvendo o ensino das geometrias não euclidianas e a expressão gráfica. Ela tomou por hipótese que as geometrias não euclidianas surgiram por comparação com a geometria euclidiana, apresentando um estudo sobre a geometria euclidiana e as geometrias hiperbólica e esférica, suas diferenças e semelhanças bem como, o uso dessas geometrias em sala de aula. Na sequência, ela trata das geometrias projetiva e fractal e, as relaciona com a sala de aula.

Camargo (2012) apresenta como é tratada a expressão gráfica no ensino e quais as metodologias de ensino das geometrias não euclidianas. Finalmente, antes de suas reflexões finais, a autora propõe 18 atividades que podem ser realizadas em sala de aula a partir das geometrias não euclidianas, sendo três sobre a geometria hiperbólica, seis sobre a elíptica (ou esférica), cinco com relação à geometria projetiva e quatro para a geometria fractal. Todas essas, associadas à expressão gráfica. A autora explica que o fato de relacionar o ensino de geometrias não euclidianas à expressão gráfica é possível, uma vez que, ao serem realizadas “as representações gráficas em Matemática para condensar o entendimento, pois suporta também a capacidade de generalização presente nos conceitos matemáticos”. (CAMARGO, 2012, p. 131). Essa capacidade de

generalização também acontece quando se utilizam representações gráficas para o estudo das geometrias não euclidianas, que são uma nova visão do mundo.

Carli (2012) realizou um estudo sobre as dificuldades relacionadas tanto à geometria euclidiana como não euclidiana, durante um curso de capacitação¹² para professores da rede básica. A autora apresenta um resgate histórico sobre as geometrias não euclidianas, assim como a descrição do curso que foi oferecido e dos cinco questionários aplicados durante o mesmo e, duas categorias foram definidas com relação às dificuldades apresentadas durante o curso: dificuldades relacionadas à geometria euclidiana (erros conceituais, não compreensão da representação de entes geométricos e insistência em atribuir aos termos geométricos nomenclaturas algébricas) e dificuldades relacionadas às geometrias não euclidianas (dificuldades em aceitar entes geométricos com representação diferente do modelo euclidiano, busca de semelhanças com a geometria euclidiana e necessidade de um modelo). Seu trabalho mostrou que muitos professores ainda desconhecem o conteúdo de geometrias não euclidianas ou seu conhecimento é superficial. Com relação à geometria euclidiana, a maioria associa o conhecimento geométrico unicamente com o ensinado em sala de aula restringindo a conteúdos que envolvem cálculos e métricas.

Cavichiolo (2011) tratou das geometrias não euclidianas com vistas à formação inicial do professor de Matemática sob a ótica dos formadores. Segundo ela, “a inclusão de conteúdos de Geometrias não Euclidianas [...] tem sido tema de discussões [...], resultando em orientações curriculares que pressupõem um professor de Matemática preparado para esse ensino”. (CAVICHIOLO, 2011, p. 4).

Inicialmente, são apresentados alguns dados referentes a duas pesquisas que constataam que 50% dos professores não estudaram e 34% nem sabem o que são as geometrias não euclidianas¹³. A outra pesquisa¹⁴ trata do fato de que são

¹² Assim como o que foi desenvolvido por Santos (2009).

¹³ Estudo realizado por: KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 20, n. 28, p. 69-94, 2007.

raros os cursos de licenciatura que tratam desse assunto. Posteriormente, é realizada uma análise de diversas dissertações que envolvem o tema e, ela conclui que as pesquisas realizadas em seu estudo mostram que os conteúdos relacionados às geometrias não euclidianas não estão totalmente incorporados à formação inicial recebida pelo professor de Matemática e, o que se tem percebido na maior parte dos cursos de licenciatura é que “essas geometrias não são contempladas nas suas propostas curriculares e, quando são, nem sempre são exploradas com vistas à preparação do futuro professor para que estes possam ensiná-las na escola básica”. (CAVICHIOLO, 2011, p. 33).

Cavichiolo (2011) realizou cinco entrevistas com professores que atuam no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Paraná e a partir disso, apontou algumas razões para a inclusão das geometrias não euclidianas na formação inicial, sob duas dimensões: histórico-epistemológica e didático conceitual. A autora afirma que estudar esse tema durante o curso de licenciatura em Matemática contribui “não somente para a ampliação e aprofundamento do conhecimento da área da Geometria, mas, sobretudo, da própria Matemática” (CAVICHIOLO, 2011, p. 125). Além disso, propicia ao futuro professor a compreensão de conceitos geométricos que aparecem em outras disciplinas cursadas durante a graduação, bem como, em correlações que podem ser feitas na Escola Básica, como por exemplo, entre Matemática e Arte, Matemática e Biologia, Matemática e Geografia, etc.

Conclui-se, ainda, que o estudo dessas geometrias conduz à reflexão sobre a natureza e os processos de construção da Matemática, mostrando-a como constructo intelectual dinâmico e, portanto, passível de mudanças decorrentes das necessidades do homem de resolver determinados problemas em diferentes épocas, quer sejam internos da Matemática ou da própria realidade social. (CAVICHIOLO, 2011, p. 125).

Assim, ela finaliza seu trabalho levando em conta a convicção de existem razões importantes para a inclusão desse conteúdo na formação dos futuros professores de Matemática, dentre as quais “ampliar a visão de Matemática dos

¹⁴ Se refere a dissertação de Santos (2009) referenciada no artigo.

licenciandos e a compreensão do fazer matemático como um processo que [...] é passível de mudanças e [...] que é produto da criação humana”. (CAVICHIOLO, 2011, p. 130).

4 Considerações finais

Segundo essas pesquisas, os professores em formação inicial ou continuada ainda não se encontram adequadamente preparados para o ensino das geometrias não euclidianas. Percebe-se que existem compreensões corretas sobre o assunto, no entanto, há ainda compreensões equivocadas sobre o tema, como seria o caso de compreender esses conteúdos como toda geometria fora do plano. Essas pesquisas nos apresentam ainda, algumas estatísticas das dúvidas e realidades do professorado: quanto à inclusão das Geometrias Não Euclidianas nas DCE/PR, quanto às diferenças entre elas e a Geometria Euclidiana e, quanto à importância do ensino de seu ensino.

Em síntese, os resultados das pesquisas realizadas com relação às geometrias não euclidianas no Paraná podem ser divididos em três categorias gerais:

- i. A inserção desse conteúdo não foi algo simples e de concordância de todos os professores – Caldato (2011), Bagio (2014).
- ii. A formação inicial e continuada do professor de Matemática deveria preparar melhor a todos para o ensino adequado deste conteúdo – Cavichiolo (2011), Santos (2009), Carli (2012), Lovis (2013), Lovis (2009), Caldato (2011).
- iii. A necessidade de mais materiais didáticos para o ensino desses conteúdos além dos propostos pela SEED – Camargo (2012), Ferreira (2011), Lovis (2009), Pereira (2013), Semmer (2013), Zanella (2013).

Apesar do grande número de propostas de atividades para o ensino dessas geometrias, sabe-se que, muitas vezes, esses materiais não chegam às mãos

O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná

dos professores (salvo àqueles que participaram ativamente dos minicursos aqui descritos). Isso não ocorre, muitas vezes, pela falta de tempo para estudos complementares, e também, por não haver incentivo de envio de materiais por parte dos órgãos (Secretaria de Educação, Núcleos Regionais de Educação e escolas). O que se percebe também é que os livros didáticos ainda não o tratam com a devida naturalidade (em sua maioria) e, alguns nem o apresentam, por isso a importância de se realizarem cursos de formação continuada com os professores da rede básica.

Finalmente, o que nos dizem todas essas pesquisas é que após sete anos da publicação do documento de Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, a formação inicial e continuada do professor de Matemática ainda não é adequada para o ensino de geometrias não euclidianas, assim como a as ações de implementação das DCE/PR poderiam ter gerado maiores discussões.

5 Referências

BAGIO, Viviane Aparecida. **Da escrita à implementação das DCE/PR: um retrato feito a cinco vozes e milhares de mãos.** Curitiba: UFPR, 2014. 350 f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.

BARBOSA, Línlya Natássia Sachs Carmelengo de. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das Geometrias Não Euclidianas.** Londrina: UEL, 2011. 58 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

CALDATTO, Marlova Estela. **O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a inserção das Geometrias Não-Euclidianas.** Maringá: UEM, 2011. 261 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e para a Matemática.

CAMARGO, Keilla Cristina Arsie. **A Expressão Gráfica e o ensino das Geometrias Não Euclidianas.** Curitiba: UFPR, 2012. 144 f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.

CARLI, Francielli Aparecida Rocha de. **A aprendizagem de geometrias não Euclidianas: um estudo realizado com professores da rede pública de ensino.**

Maringá: UEM, 2012. 145 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e para a Matemática.

CAVICHIOLO, Claudia Vanessa. **Geometrias Não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: o que dizem os formadores.** Curitiba: UFPR, 2011. 165 f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e Introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

FERREIRA, Luciano. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “construção do plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra.** Maringá: UEM, 2011. 291 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e para a Matemática.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LANCON, Donald Jr. **An Introduction to the Works of Euclid with an Emphasis on the Elements.** 1991. Disponível em: <<http://www.obkb.com/dcljr/euclid.html#overv>>. Acesso em: 23 jun. 2015.

LOVIS, Karla Aparecida. **As concepções de Geometrias de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica.** Maringá: UEM, 2013. 200 f. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e para a Matemática.

LOVIS, Karla Aparecida. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores.** Maringá: UEM, 2009. 148 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e para a Matemática.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

PEREIRA, Alceu Sérgio. **Fractais circulares: algumas considerações e atividades.** Londrina: UEL, 2013. 83 f. Dissertação (mestrado profissional). Universidade Estadual de Londrina, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

SANTOS, Talita Secorun dos. **A inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no currículo da Educação Básica.** Maringá: UEM, 2009. 138 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e para a Matemática.

O que dizem as produções paranaenses quanto ao ensino das geometrias não euclidianas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná

SEMMER, Simone. **Ensino de Geometrias Não Euclidianas usando Arte e Matemática**. Ponta Grossa: UTFPR, 2013. 267 f. Dissertação (mestrado profissional). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia.

ZANELLA, Idemar André. **Geometria Esférica: uma proposta de atividades com aplicações**. Londrina: UEL, 2013. 132 f. Dissertação (mestrado profissional). Universidade Estadual de Londrina, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.