Constante de Liouville: uma escolha não feita pelo acaso

Constant Liouville: a choice not made by chance

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck[1]
Priscila Friedemann[2]

Resumo

Neste artigo estamos interessados em discutir a importância de se conhecer a trajetória, os caminhos percorridos por trás das pesquisas em matemática. Para delinear os trabalhos, como exemplo, vamos nos apoiar na Constante de Liouville, ou seja, apresentar os resultados e discussões que possivelmente induziram Liouville a estabelecer este número, isto é, estamos interessados no porquê da sua definição e como tal escolha acabou por resolver o problema da existência de números transcendentes, mostrando esta constante como o primeiro exemplo concreto de número transcendente. Ainda, apresentaremos diversos resultados que impulsionaram o desenvolvimento desta teoria e outros que permanecem em aberto. Acreditamos que valorizar este processo de construção do conhecimento matemático formal através de investigações detalhadas a respeito das descobertas matemáticas contribui com a precisa compreensão de conceitos e, consequentemente, com o posterior desenvolvimento de ideias mais avançadas.

Palavras-chave: Descoberta matemática. Número de Liouville. Números transcendentes.

1 Introdução

Desde os primórdios diversos pensadores utilizaram seu tempo e energia na proposição e utilização de vários resultados matemáticos, quer tenham sido eles obtidos pela simples observação, como fórmulas para o cálculo de algumas áreas, ou obtidos através de formulações mais abstratas, como a Teoria das Proporções de Eudoxo e seu ‘estratagema’ para contornar o problema que a descoberta da classe dos números irracionais ocasionou na teoria pitagórica das

[1] Doutora em Matemática, docente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, campus de Foz do Iguaçu, e-mail: kellyrobertaml@gmail.com.

[2] Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, campus de Foz do Iguaçu, e-mail: priscilafriedemann@gmail.com.

proporções, uma vez que a definição pitagórica de proporção assumia como comensuráveis duas grandezas similares. Segundo Eves,

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por *algum* número racional. (EVES, 2004, p. 106).

As teorias propostas são, na sua maioria, investigadas por outros pesquisadores e novas proposições são estabelecidas com base nestas discussões. Ainda, conforme Eves (2004, p. 107) “O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872”. Dessa forma, com o passar dos anos e a averiguação dos resultados estabelecidos, novas áreas de pesquisa foram estabelecidas e a matemática se consolidou como uma ciência abrangente com muitos resultados interessantes demonstrados (vide grande número de revistas especializadas na área).

Hoje, com o uso das redes de comunicação e a publicação *online* de periódicos, é cada vez mais fácil localizar teoremas, corolários e proposições, mas o que dificilmente é apresentado ao leitor são os caminhos percorridos pelos pesquisadores para a proposição de tais resultados.

Acreditar em algo, em uma conjectura, seja pela observação ou pela intuição é fácil, entretanto o difícil é saber por onde trilhar a caminhada para mostrar que este fato é verdadeiro, para se provar tal conjectura.

Valorizar o processo de construção do conhecimento matemático formal/acadêmico é extremamente importante nos cursos de licenciatura, pois acreditamos que esta atitude faz com que os acadêmicos reflitam sobre o modo como são desenvolvidas algumas estruturas matemáticas, que os conteúdos não são expostos de forma fragmentada e isto lhes permitirá, enquanto futuros professores, conduzir suas aulas de forma mais homogênea, contínua, ou seja, estabelecendo relações entre os conceitos. De fato, conforme exposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), se os conteúdos são apresentados de forma fragmentada,

> Nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 2000, p. 43).

Além disso, observamos que à medida que se apresenta ao acadêmico a história por de trás dos resultados matemáticos, as tentativas e os erros cometidos pelos personagens envolvidos nestes processos de descoberta, ele percebe a importância “da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático” (BRASIL, 2000, p. 43). Isto amplia a percepção de que

> A Matemática [...] não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p. 40).

Ao passo que discutimos as ideias desenvolvidas por trás de cada resultado valorizamos o trabalho de pesquisa, a persistência, a dedicação do pesquisador, além de enfatizar a importância de se conhecer diferentes métodos para abordar um problema, de não se utilizar a matemática de forma mecânica, a qual impossibilita a construção de novas estruturas e pensamentos.

Assim, pretendemos neste trabalho expor como se deu o processo de ‘descoberta matemática’, ou seja, explorar como um determinado conceito, no caso a constante de Liouville, foi estabelecido e a trajetória que conduziu a sua formulação.

Elegemos abordar a constante de Liouville[3] (denotada por α), ou seja, investigar o porquê de sua escolha e quais os possíveis motivos e/ou fatos que conduziram Liouville a sua definição. A preferência por esta definição foi motivada pela sua relevância histórica, pois apesar de Cantor provar que existem números transcendentes sua demonstração não foi construtiva, ou seja, “a demonstração não estabelece a existência de números transcendentes produzindo um exemplo específico de um desses números” (EVES, 2004, p. 665). Dessa forma, “a insatisfação de alguns matemáticos com as demonstrações de existências não-construtivas acarretou uma grande soma de esforços para substituir essas demonstrações por outras que fornecessem os objetos em exame” (EVES, 2004, p. 665). Neste cenário, a constante de Liouville foi o primeiro exemplo concreto da existência de números transcendentes. Além disso, sua investigação sobre números transcendentes contribuiu com a formulação de novos resultados, como observado na citação abaixo.

> [Liouville] estabeleceu a existência de números transcendentes e em 1844 provou que nem *e* nem e^2 podem ser raízes de equações quadráticas com coeficientes racionais. Isto era um passo na cadeia de argumentos que conduzia da prova de Lambert, de 1716, de que π era irracional à prova de Hermite de que *e* é transcendente (1873) e à prova final de F. Lindemann de que π é transcendente (1882). (STRUIK, 1989, p. 287).

Na sequência apresentaremos a definição de números algébricos e transcendentes, seguido da motivação algébrica para a escolha do número α e a demonstração de que α realmente é um número transcendente. Os resultados matemáticos discutidos neste artigo e maiores informações sobre o tema dos transcendentes podem ser obtidos nas obras de Figueiredo (2002), Niven (1990) e Marques (2013).

---

[3] Muitos autores chamam esta constante apenas de Número de Liouville. Entretanto, uma definição mais geral é dada: “Um Número real α é chamado de número de Liouville se existir uma sucessão $\{p_j/q_j\}$, $q_j>0$, mdc$\{p_j, q_j\}=1$, com $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$” . (FIGUEIREDO, 2002, p. 26).

2 O número de Liouville

Quando analisamos o desenvolvimento das fundamentações teóricas dos conjuntos numéricos percebemos que elas se deram ao contrário do que costumamos apresentar nas escolas – naturais, inteiros, racionais, (irracionais) reais e complexos – e que para estabelecer a base conceitual dos reais é possível adotar a construção do conjunto pelos cortes de Dedekind ou pelas sequências de Cauchy (ou complemento dos racionais de Cantor), pois "em 1872, G. Cantor, de Halle, fundador da teoria dos conjuntos, e R. Dedekind, de Braunschweig, apresentaram simultânea e independentemente os fundamentos gerais dos números irracionais" (KLEIN, 2009, p. 44). Além disso, independentemente do método utilizado para construção é possível garantirmos a unicidade do corpo dos reais através de isomorfismos, conforme Lima (2009) ou Ávila (2006). De fato,

> A Matemática desenvolveu-se extensamente nos tempos modernos (isto é, a partir do século XVI), até o início do século XIX, mesmo sem qualquer fundamentação dos diferentes sistemas numéricos. Trabalhavam-se livremente com os números racionais e irracionais, desenvolvendo todas as suas propriedades, sem que houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento. [...] Foi só no século XIX que os matemáticos começaram a sentir necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos. E é interessante observar que a fundamentação destes sistemas ocorreu na ordem inversa: primeiro foram organizados os números complexos, depois os números reais, os racionais, os inteiros e, finalmente, os números naturais. (ÁVILA, 2006, p. 55).

Portanto, hoje, tendo conhecimento desta fundamentação rigorosa dos reais[4], pesquisadores postulam/assumem por definição os reais como um corpo ordenado completo. De fato, esta afirmação faz sentido, pois como mencionado anteriormente "qualquer corpo ordenado completo é necessariamente isomorfo ao corpo dos números reais" (ÁVILA, 2006).

A despeito da fundamentação dos conjuntos numéricos, outros aspectos foram explorados, em especial sobre os reais. Leonhard Euler, por meio de decomposições de séries infinitas, demonstrou que

[4] Maiores detalhes em Ferreira (2011).

e e e^2 são irracionais e, desta forma, percebeu uma nova classificação para os conjuntos numéricos: algébricos e transcendentes. Ele observou que:

> Enquanto a $\sqrt{2}$ elevada a qualquer expoente par torna-se um número racional, as potências racionais de *e* continuam a ser irracionais. Parecia que a irracionalidade de *e* era mais "profunda" do que a de $\sqrt{2}$. [...] Estes indícios sugeriam, portanto, que os números chamados reais poderiam estar divididos em duas categorias: os que são e os que não são raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros. (GARBI, 2007, p. 193).

Assim, para melhor estudar a natureza de alguns conjuntos numéricos definiu-se que: um número é dito *algébrico* se é solução de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, onde os coeficientes $a_i's$ são inteiros e, um número é dito *transcendente* se não for algébrico. O nome transcendente refere-se ao fato de que tais números transcendem as operações dos métodos algébricos.

De acordo com Marques (2013) a dificuldade em se provar que um número é transcendente decorre da sua própria definição que é a negação de ser algébrico.

Por outro lado, é fácil exibir vários números algébricos, como exemplo $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ que é raiz do polinômio $p(x) = x^6 - 4x^3 + 1$. Além deste, todo número racional $\frac{p}{q}$, com q não nulo, é algébrico já que satisfaz a equação $qx - p = 0$. Observe que deste fato segue que os números transcendentes são, necessariamente, irracionais.

A discussão sobre os transcendentes instigou-se quando Cantor, em 1874, utilizando as propriedades de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, provou que os números algébricos são enumeráveis e, como os reais são não enumeráveis, garantiu assim a existência dos números transcendentes. (Maiores informações em Figueiredo (2002)). Com este argumento ele mostrou que existem consideravelmente mais números transcendentes do que algébricos no conjunto dos reais, entretanto não apresentou nenhum exemplo concreto de tal número. De fato, “a prova de que o conjunto dos números algébricos é enumerável assegura a existência de números reais que não são algébricos. [...] A prova de Cantor da existência de números transcendentes dificilmente pode ser considerada construtiva”. (COURANT & ROBBINS, 2000).

Entretanto, coube ao matemático francês Joseph Liouville estabelecer um critério para que um número real seja transcendente e outros matemáticos, como Hurwitz, Lambert, Thue, Siegel, Hermite, ampliaram seus estudos para esclarecer diversos pontos sobre os transcendentes, em especial sobre os irracionais possíveis candidatos a transcendentes. Maiores detalhes destes resultados podem ser verificados em Marques (2013).

Investigando, na sequência, aproximações para números irracionais percebermos que dado qualquer irracional β e sua representação decimal (não periódica) podemos facilmente obter sequências de racionais que se aproximam de β. Por exemplo, $\sqrt{2} = 1{,}4142 \ldots$ pode ser aproximado por:

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$
$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10},$$
$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100},$$
$$\frac{1414}{1000} < \sqrt{2} < \frac{1415}{1000}, \ldots etc.$$

Disto podemos questionar: quais são as formas de aproximação dos números irracionais através de sequências de racionais? E qual é o grau de precisão destas aproximações?

Com a aproximação realizada acima vemos que existe racional $\frac{p}{q}$ que difere de $\sqrt{2}$ a menos de qualquer valor ε desejado, basta para tanto aumentar o valor do denominador. Isto pode ser generalizado para qualquer irracional β. Entretanto, se limitarmos o valor do denominador q, quais os tipos de aproximação que obtemos? Estes problemas serviram de inspiração para a definição do número de Liouville.

Começamos observando que todo irracional (na verdade todo número real) pode ser aproximado pelo inteiro mais próximo a ele e o erro será menor ou igual a $\frac{1}{2}$ e, é possível demonstrar[5] que: “Para qualquer número irracional β, existe um único inteiro m tal que $-\frac{1}{2} < \beta - m < \frac{1}{2}$.” Esta aproximação de β por um número racional $\frac{p}{q}$ pode ser melhorada a menos de $\frac{p}{kq}$, para k natural. Para ilustrarmos, tomando o denominador $q = 21$ e $\beta = \sqrt{2}$ temos o produto $21\sqrt{2} = 29{,}6984\ldots$, que possui 30 como inteiro mais próximo. Este número representará o numerador p. Assim,

$$-\frac{1}{2} < 21\sqrt{2} - 30 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{42} < \sqrt{2} - \frac{30}{21} < \frac{1}{42} \Rightarrow -\frac{1}{2q} < \sqrt{2} - \frac{p}{q} < \frac{1}{2q}.$$

De fato, “quaisquer que sejam o número irracional β e o inteiro positivo k, existe um número racional $\frac{p}{q}$, cujo denominador não excede k, tal que $-\frac{1}{kq} < \beta - \frac{p}{q} < \frac{1}{kq}$”. Para esta demonstração basta analisarmos os primeiros k múltiplos de β e verificarmos que suas diferenças da parte inteira se localizam nos k primeiros subintervalos da unidade, ou seja, num dos intervalos do tipo $[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$, $j = 1, 2, \cdots, k$.

Como exemplo, tome o irracional $\sqrt{7} = 2{,}6457\ldots$ e $k = 5$. Vamos determinar o racional $\frac{p}{q}$ do resultado acima. Considerando os primeiros cinco múltiplos de $\beta = \sqrt{7}$ temos: $\beta = 2{,}6457\ldots$; $2\beta = 5{,}2915\ldots$; $3\beta = 7{,}9372\ldots$; $4\beta = 10{,}5830\ldots$; $5\beta = 13{,}2287\ldots$. Assim, as diferenças com suas respectivas partes inteiras localizam-se em um dos 5 subintervalos $I_1 = [0, \frac{1}{5}]$, $I_2 = [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$, $I_3 = [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, $I_4 = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$ e $I_5 = [\frac{4}{5}, 1]$ da unidade $[0,1]$, à saber: $\beta - 2 = 0{,}6457\ldots$ em I_4, $2\beta - 5 = 0{,}2915\ldots$ em I_2, $3\beta - 7 = 0{,}9372\ldots$ em I_5, $4\beta - 10 = 0{,}5830\ldots$ em I_3 e $5\beta - 13 = 0{,}2287\ldots$ em I_2.

[5] Maiores detalhes em Niven (1990). Observe, como exemplo, que $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ se aproxima de 1 a menos de $\frac{1}{2}$. Da mesma forma, $e = 2{,}7182\ldots$ se aproxima de 3.

Logo, ou uma diferença está no intervalo I_1 e, portanto, entre os valores $-\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$, ou um dos subintervalos possui duas diferenças. No nosso exemplo os valores $2\beta - 5 = 0{,}2915\ldots$ e $5\beta - 13 = 0{,}2287\ldots$ estão em I_2, ou seja, a menos de $\frac{1}{5}$ um do outro. Dessa forma,

$$-\frac{1}{5} < \left(5\sqrt{7} - 13\right) - \left(2\sqrt{7} - 5\right) < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} < 3\sqrt{7} - 8 < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{3 \times 5} < \sqrt{7} - \frac{8}{3} < \frac{1}{3 \times 5}.$$

Da última desigualdade observamos que para o irracional $\sqrt{7}$ e $k = 5$ temos que o racional $\frac{8}{3}$ satisfaz a proposição acima.

Outros importantes resultados, disponíveis em Marques (2013) ou Figueiredo (2002), associados à aproximação de um número irracional por racional foram obtidos por pesquisadores como Hurwitz, Siegel, Thue e, abaixo, enunciamos os mais significativos.

- Todo número racional é aproximável[6] na ordem 1, e não é aproximável na ordem k, para $k > 1$.
- Todo número irracional λ é aproximável na ordem 2.

O resultado anterior garante que existe uma constante c positiva tal que a desigualdade $\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$ se verifica para infinitos racionais $\frac{p}{q}$ distintos. Hurwitz mostrou que a menor constante c que satisfaz o resultado acima é dada por $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Abaixo apresentamos um teorema esclarecedor na busca pelos números transcendentes no sentido de apontar como se dão as aproximações para os algébricos. (Maiores informações sobre esta definição e os resultados teóricos apresentados na sequência em Figueiredo (2002) ou Marques (2013)).

- Se α é um número algébrico real de grau n, então α não é aproximável na ordem $n + 1$.

[6] Um número real x é dito aproximável na ordem n por racionais se existir uma constante $c > 0$ e uma sucessão $\{p_j/q_j\}$ de racionais distintos, com $q_j > 0$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$, tais que $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^n}$.

Portanto, dos resultados apresentados acima percebemos que para se construir um número transcendente é interessante condicionar tal número a aproximações por infinitos racionais $\frac{p}{q}$ não apenas a menos de $\frac{1}{q^2}$, mas de forma que ele seja aproximado a menos de $\frac{1}{q^n}$ para qualquer inteiro positivo n. Desta maneira, Liouville define o seu número α por:

$$\alpha = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots$$

Isto mostra que tal escolha não foi aleatória, mas baseada numa série de investigações matemáticas que induziram a sua definição, todas baseadas numa melhor compreensão dos conjuntos numéricos já “consolidados”. Ainda, com a introdução de uma nova classe numérica — os números transcendentes — outros resultados foram associados às teorias existentes, o que possibilitou avançar rumo ao esclarecimento desta ‘nova’ categorização numérica.

3 A transcendência de α

Nesta seção apresentaremos argumentos que provam que a constante de Liouville é transcendente. O argumento principal está baseado nos tipos de aproximação para este número, o que justifica a sua definição. Assim, lembrando que a constante de Liouville é dada por

$$\alpha = 0{,}1100010000\ldots = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \ldots$$

considere β o número determinado pela soma dos primeiros j termos de α,

$$\beta = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \ldots + 10^{-j!} = \frac{t}{10^{j!}}$$

com $j \in \mathbb{N}$ qualquer e t um número inteiro. Note que β é racional e está muito próximo de α, pois

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + 10^{-(j+3)!} + \ldots < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$$

uma vez que o algarismo 1 aparece pela primeira vez na $(j+1)!$ casa decimal.

Suponhamos, por contradição, que α é algébrico. Então, este número satisfaz uma equação de coeficientes inteiros. Seja $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} +$

$c_{n-2}x^{n-2} + \ ... + c_2x^2 + c_1x + c_0$ a equação de menor grau satisfeita por α, onde $c_n, c_{n-1}, \dots, c_0$ são inteiros.

Observe que o número β não é uma raiz de $f(x)$, porque, se fosse, poderíamos escrever: $f(x) = (x-\beta)q(x)$. Como $f(\alpha) = 0$, teríamos $f(\alpha) = (\alpha-\beta)q(\alpha) = 0$. Logo, $q(\alpha) = 0$ pois $\alpha \neq \beta$. Mas o grau de $q(x)$ é menor que o grau da $f(x)$ que é, por hipótese, a equação de menor grau satisfeita por α. Assim, $f(\beta) \neq 0$.

Calculemos, agora, $|f(\alpha) - f(\beta)| = |f(\beta)|$ (pois $f(\alpha) = 0$):

$$f(\alpha) - f(\beta) = c_n(\alpha^n - \beta^n) + c_{n-1}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \ ... + c_1(\alpha-\beta) =$$
$$= (\alpha-\beta)[c_n(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \beta^{n-1}) + c_{n-1}(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \cdots + \beta^{n-2}) + \ ... + c_1]$$

Tomando o valor absoluto, temos:

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |\alpha-\beta||c_n(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \beta^{n-1}) + \ ... \ + c_1|$$

Utilizando a desigualdade triangular e que $|f(\alpha) - f(\beta)| < \alpha - \beta$ e $0 < \alpha^r\beta^s < 1, \forall\, r, s \in \mathbb{Z}_+$, concluímos que:

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < (\alpha-\beta)[|c_n|n + |c_{n-1}|(n-1) + \ ... + |c_2|2 + |c_1|]$$

Chamando de N a parte fatorada de $(\alpha - \beta)$, é possível escrevermos

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < (\alpha-\beta)N$$

o que mostra que $|f(\alpha) - f(\beta)|$ é da mesma ordem de grandeza que $(\alpha-\beta)$.

Olhando, agora, para $|f(\alpha) - f(\beta)| \times 10^{n\times j!} = |f(\beta)| \times 10^{n\times j!}$, podemos escrever

$$f(\beta) = c_n\beta^n + c_{n-1}\beta^{n-1} + \ ... + c_0 = \frac{c_nt^n}{10^{n\times(j!)}} + \frac{C_{(n-1)}t^{n-1}}{10^{(n-1)\times(j!)}} + \ ... + c_0.$$

E, então,

$$f(\beta) \times 10^{n\times(j!)} = c_nt^n + c_{n-1}t^{n-1} \times 10^{j!} + c_{n-2}t^{n-2} \times 10^{2j!} + \ ... + c_0 \times 10^{n(j!)},$$

onde o lado esquerdo é um inteiro diferente de zero (uma vez que $f(\beta) \neq 0$), o que nos leva à conclusão de que $|f(\beta)| \times 10^{n\times j!}$ é um inteiro positivo. Por outro lado, observe que

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \times 10^{n\times j!} < N(\alpha-\beta) \times 10^{n\times j!} < N.\frac{2}{10^{(j+1)!}}10^{n\times j!} = \frac{2N}{10^{(j+1-n)j!}}.$$

Como frisamos no início da demonstração, j não depende nem de N nem de n, por isso, podemos tomar j suficientemente grande de forma que $|f(\alpha) - f(\beta)| \times 10^{n \times j!} < 1$. Como $|f(\alpha) - f(\beta)| = |f(\beta)|$, isto contradiz o fato demonstrado anteriormente de que $|f(\beta)| \times 10^{n \times j!}$ é um inteiro positivo.

Portanto, α não pode ser algébrico e concluímos que ele é transcendente.

4 Conclusões

Com as colocações acima procuramos mostrar o caminho percorrido por trás de uma ideia e que alguns desses passos não são tomados ao acaso, mas que decorrem de grande esforço e trabalho criativo. Ainda, a discussão deixa claro que pesquisadores contam com a colaboração de outros colegas para o esclarecimento de teorias/resultados.

Marques (2013, p. 02) afirma que:

> A teoria transcendente vive um intrigante dilema: enquanto que, essencialmente, todos os números são transcendentes, estabelecer a transcendência de um número particular é bastante complicada. O principal obstáculo é que um número transcendente é definido não pelo que ele é, mas em vez disto, pelo que ele não é.

Isto deixa claro que, apesar de conhecermos importante resultados sobre os transcendentes, muito ainda se tem por fazer e a principal dificuldade reside na definição destes números.

Para exemplificar tal situação, Gelfond (1934) e Schneider (1935) demonstraram, independentemente, que “Se α e β são números algébricos (reais ou complexos) e se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e β é algébrico não racional, então α^{β} é transcendente” (cf. Marques (2013, p. 119) ou Boyer (1996, p. 427)), ou seja, o teorema esclarece a natureza aritmética da potenciação de dois algébricos: um transcendente. Logo, poderíamos pensar que a potenciação de números mais complicados (transcendentes) continua a ser complicado. Entretanto, isto nem sempre acontece, conforme mostram os exemplos abaixo.

O número 2 é algébrico, entretanto ele pode ser reescrito como potências de transcendentes, ou seja, $2 = e^{ln2}$.

Por outro lado, e^{π} é transcendente pelo teorema de Gelfond-Schneider apresentado acima, pois $e^{\pi} = (e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i}$, isto é, base algébrica (-1) diferente de zero ou um elevada a potência algébrica não racional $(-i)$.

Com isto percebemos que a natureza de α^{β} ainda é desconhecida para quaisquer α e β e estudos a este respeito merecem ser realizados. Um resultado que está aberto é determinar se π^{π} é um número algébrico ou transcendente.

Por outro lado, abordar um assunto que está nas bases das conceitualizações matemáticas se mostra primordial para o licenciando, pois lhe são fornecidos mais argumentos para que compreendam claramente as estruturas dos números reais, e por consequência dos demais conjuntos numéricos (inclusive os complexos). De fato,

> Para os alunos de Licenciatura é importante a representação dos números reais, pois eles terão que passar aos seus alunos no ensino médio uma boa ideia do que são estes números e, para tanto, é necessário que eles mesmos tenham as ideias claras a este respeito. (ARAGONA, 2010, prefácio).

Além do mais, segundo Magossi e Poletti (2012),

> Caracterizar e verbalizar que a matemática pode ser vista como uma linguagem composta de estruturas e objetos e não, simplesmente, como uma linguagem adaptada a resolver problemas do dia-a-dia, pode motivar o desenvolvimento da intuição matemática que advém, não só da matemática vista como sendo útil à resolução de problemas práticos do dia-a-dia, mas também de sua visão intrínseca como estruturas e jogos, na busca contínua por padrões e estruturas. (2012, p.11).

Portanto, percebemos que, a depender da abordagem que se adota nos estudos, a averiguação de resultados requer conhecimento de diversos temas. Dessa forma, acreditamos que investigações detalhadas a respeito das descobertas matemáticas são importantes para contribuir com a precisa compreensão de conceitos e, consequentemente, com o posterior desenvolvimento de ideias mais avançadas.

Ressaltamos, por fim, que um dos objetivos deste artigo foi discutir os resultados matemáticos que impulsionaram a formalização do número de Liouville elucidando que o pensamento criativo está atrelado, ou mesmo interligado, às bases conceituais pré-estabelecidas nesta área de conhecimento. Não tínhamos como intenção aqui explorar a utilização do conceito de transcendência no ensino da matemática, mas este enfoque poderá ser dado em outras pesquisas futuras.

Referências

ARAGONA, Jorge. **Números Reais**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2014.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo. Edgard Blücher, 1996.

COURANT, Richard, ROBBINS, Herbert. **O que é a Matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo G.. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2002.

GARBI, Gilberto G.. **O Romance das Equações Algébricas**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

KLEIN, Félix. **Matemática Elementar de um Ponte de Vista Superior**: Aritmética. Tradução: Tiago Pedro, Suzana Metello de Nápolis. Lisboa: Editora da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LIMA, Elon L.. **Curso de Análise.** Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

MAGOSSI, José C., POLETTI, Eliane C. C.. O Movimento das Estruturas Matemáticas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, vol. 12, n. 15, p. 1-13, dez/2012.

MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes**. Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2013.

NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais***.* Rio de Janeiro: Editora da SBM, 1990.

STRUIK, Dirk J.. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.