Números reais e o problema da medida

Real numbers and the measurement problem

Carlos Eduardo de Lima Duarte[1]

Resumo

Nos livros didáticos do ensino médio, os números reais são normalmente apresentados como os números que abrangem os racionais (números com representação decimal finita ou infinita periódica) e os irracionais (números com uma representação decimal infinita e não-periódica). Nesse trabalho, queremos propor ao professor de matemática uma reflexão acerca do ensino de números reais no ensino médio, fazendo com que ele reflita na construção desses números a partir de sua necessidade, mostrando ao aluno que a matemática se desenvolveu a partir das necessidades humanas ao longo dos tempos.

Palavras-chave: Números racionais. Medida. Cortes de Dedekind. Números reais.

1 Introdução

No ensino médio, o conteúdo "Números Reais" normalmente é apresentado de maneira fragmentada e sem justificativas. A maioria dos livros utilizados nas escolas brasileiras, ao tratar dos números, simplesmente classifica-os em um determinado tipo: natural, inteiro, racional, irracional ou real. Eles desprezam que há uma construção lógica e histórica desses números ao simplesmente classifica-los. Porém, sabemos que os números não existem por si só. Eles existem (foram inventados) para suprir algumas necessidades humanas – quais sejam, contagem e medida. E é isso que queremos mostrar com esse trabalho: que os números são fruto da criação humana. Tentando, com isso, fazer com que o aluno se sinta parte dessa história e tenha maior interesse pela matemática.

Para isso, vamos apresentar os números racionais como aqueles que podemos usar para realizar algumas medidas e chegar no problema da

[1] Mestre em Matemática pela UFRN / PROFMAT e especialista em Educação. Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) – Campus Parnamirim. E-mail: carlos.duarte@ifrn.edu.br.

incomensurabilidade. A seguir, apresentaremos os números reais a partir dos cortes de Dedekind[2], uma maneira mais formal para apresentar os tais números.

2 Números racionais e o problema da medida

2.1 Medição de Segmentos

Assim como contar, *medir* é uma operação que utilizamos bastante no nosso dia-a-dia. Medir significa comparar grandezas de mesma espécie. Não se trata de uma simples comparação para ver quem é maior, mas de ver quantas vezes um “cabe” no outro.

Se queremos comparar, por exemplo, os comprimentos dos segmentos *AB* e *CD* abaixo, verificamos quantas vezes *CD* cabe em *AB*. Assim, se dissermos que o comprimento de *CD* (o qual denotaremos por $\overline{CD}$) é de 1 unidade (u), o segmento *AB* tem comprimento igual a $3u$ (figura 1).

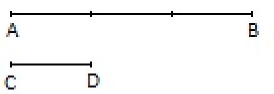

Figura 1: Medida de um segmento
Fonte: acervo pessoal

Portanto, é necessário estabelecermos uma unidade padrão de medida para todas as grandezas de mesma espécie (como centímetro, metro, litro etc.) e, depois, verificar quantas vezes a unidade cabe no objeto a ser medido. Esse número (quantidade de vezes que a unidade cabe no objeto) chama-se *medida* da grandeza em relação a essa unidade. Note que, apesar do comprimento de um segmento ser constante, sua medida depende da unidade adotada. No exemplo

[2] Segundo Ávila (2001), “vários matemáticos do século XIX se preocuparam com a construção dos números reais, dentre eles, Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e George Cantor”. Richard Dedekind (1831 – 1916) estudou em Göttingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. No início de sua carreira em 1858 como professor, quando teve de ensinar Cálculo Diferencial, percebeu a falta de fundamentação adequada para os números reais. E foi aí que ele resolveu estudar os números reais de maneira mais aprofundada.

da figura acima, se a unidade de medida adotada, ao invés de ser o segmento *CD*, fosse um segmento cujo comprimento é a metade de *CD*, a medida de *AB* seria $6u$ e não $3u$.

Em resumo, para realizarmos uma medida, fazemos em três etapas: escolha da unidade; comparação do objeto com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por meio de um número.

2.2 Subdivisão da Unidade

Às vezes, é necessário subdividir a unidade de medida num certo número de partes iguais. Vejamos um exemplo (figura 2):

EXEMPLO 1. Suponhamos que um segmento *AB* medido com a unidade $\overline{CD} = u$, mede 3. Se dividirmos a unidade *CD* em 4 partes iguais e tomarmos para a nova unidade o segmento *CE*, de medida u', teremos que a medida de *AB* será igual a 12. Além disso, o resultado da medição com a unidade u tanto pode ser expresso pelo número 3 como pela razão dos dois números 12 e 4, isto é, pelo quociente 12:4 ou $\frac{12}{4}$.

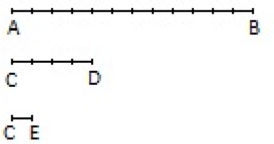

Figura 2: Medida do segmento *AB*
Fonte: acervo pessoal

De maneira geral, se uma grandeza, medida com a unidade u, mede m, e subdividirmos u em n partes iguais, a medida da mesma grandeza, com a mesma unidade u, exprime-se pela razão dos dois números $M = m.n$ e n. Aritmeticamente, temos $m = \frac{M}{n}$.

O caso que analisamos, porém, é um caso *muito raro* de acontecer: o fato da unidade caber um número inteiro de vezes na grandeza a se medir. O caso mais comum é o do exemplo a seguir, onde a unidade não cabe um número inteiro de vezes em *AB*.

EXEMPLO 2. Suponhamos os segmentos *AF* e *CD* conforme figura 3.

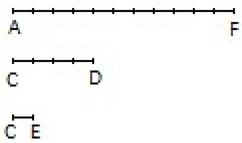

Figura 3: Medida do segmento *AF*
Fonte: acervo pessoal

Como procedemos, então, para exprimir numericamente a medição de *AF* usando como unidade de medida o segmento *CD*?

Se dividirmos o segmento *CD* (a unidade) em 4 partes iguais a nova unidade caberá 11 vezes em *AF*. Nesse caso, a medida de *AF* em relação à nova unidade é 11. Em relação à antiga unidade *CD*, porém, como podemos exprimir a medida de *AF*? A resposta a essa pergunta nos leva à criação dos números racionais. Essa construção deve ser feita de modo que com os novos números, sejam abrangidas todas as hipóteses de medição, sejam elas do primeiro exemplo ou do segundo exemplo; além disso, os novos números se reduzem aos números inteiros quando a medição se der de modo análogo ao nosso primeiro exemplo.

3 O Conjunto dos Números Racionais (Positivos)

Sejam os dois segmentos de reta *AB* e *CD*, em que em cada um deles cabe um número inteiro de vezes o segmento de medida u – *AB* contém m vezes e *CD* contém n vezes. Dizemos que a medida do segmento *AB*, tomando *CD* como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escrevemos $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$, quaisquer que sejam os números inteiros m e n (desde que n não seja nulo). Note que se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m

não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ é dito *fracionário*. Em qualquer um dos casos, o número $\frac{m}{n}$ é dito racional.

Com a criação desses números, nos parece que é sempre possível exprimir a medida de um segmento tomando outro como unidade. Além disso, a divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$. Assim, o conjunto dos números racionais (positivos) constitui uma generalização do conjunto dos números naturais (note que obtemos os números naturais dos racionais fazendo n = 1).

4 O Problema da Medida

Na seção anterior, fizemos a construção do conjunto dos números racionais com base na igualdade $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$, a qual exprime que a medida do segmento *AB*, tomando como unidade o segmento *CD*, é o número racional $\frac{m}{n}$. Essa construção se baseia no seguinte procedimento: divide-se a unidade *CD* em tantas partes iguais quantas as necessárias para que cada uma delas caiba um número inteiro de vezes em *AB* e, assim, o nosso problema de medida restringe-se, em última análise, a um problema de contagem. Agora vejamos: será que sempre poderemos proceder dessa mesma maneira, isto é, podemos sempre dividir a nossa unidade de medida em um número de partes iguais de modo que consigamos medir o segmento *AB*?

Do ponto de vista prático, a resposta a essa pergunta é *sim*. Pois quanto mais se aumenta o número de partes que dividimos a unidade, menor será o comprimento de cada uma delas e chega num momento em que a precisão limitada dos instrumentos de divisão e de medida não nos permite ir além de um certo comprimento mínimo. Com esse comprimento mínimo (uma subdivisão de *CD*), conseguimos realizar a medição de *AB*.

Do ponto de vista teórico, porém, a questão não é tão simples. Consideremos o seguinte caso de medição de segmentos:

EXEMPLO 3. Seja *ABCD* um quadrado e *AC* uma diagonal desse quadrado, conforme figura 4 abaixo.

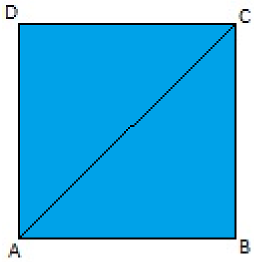

Figura 4: Quadrado *ABCD* com diagonal *AC*
Fonte: acervo pessoal

Queremos achar a medida dessa diagonal usando o lado do quadrado como unidade de medida. Se essa medida existir, então existe um número racional $r = \frac{m}{n}$ tal que $\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB}$. Essa igualdade, contudo, é incompatível com o teorema de Pitágoras (considerando os números racionais), que, nesse caso, diz que:

$\boldsymbol{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2}$ equação (1)

Vejamos: como, por hipótese, temos $\overline{AB} = \overline{BC}$, então:

$\boldsymbol{\overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2}$ equação (2)

Por outro lado, temos por hipótese que $\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB}$, que é equivalente a:

$\boldsymbol{\overline{AC}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \overline{AB}^2}$ equação (3)

Comparando esta igualdade com a anterior, temos que:

$\boldsymbol{\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2}$ equação (4)

Vamos verificar que esta última igualdade nos conduz a um absurdo aritmético. Antes, porém, vamos ver o que diz o *Teorema Fundamental da Aritmética*:

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Aritmética). "*Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*" (Hefez, 2011)

Assim, da equação (4), temos que:

$\boldsymbol{m^2 = 2 \cdot n^2}$ equação (5)

isto é,

$(\boldsymbol{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k})^2 = \boldsymbol{2} \cdot (\boldsymbol{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r})^2,$ equação (6)

que é equivalente a

$\boldsymbol{p_1}^2 \cdot \boldsymbol{p_2}^2 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{p_k}^2 = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{q_1}^2 \cdot \boldsymbol{q_2}^2 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{q_r}^2,$ equação (7)

onde p_i $(1 \leq i \leq k)$ são números primos que aparecem na decomposição de m e q_j $(1 \leq j \leq r)$ são números primos que aparecem na decomposição de n.

Pelo teorema fundamental da aritmética, isso é um absurdo, pois no primeiro membro temos uma quantidade par de fatores primos e no 2º membro temos uma quantidade ímpar, visto que além de todos os q_i estarem elevados a 2 (e, portanto, ter uma quantidade par de fatores), temos o número 2 multiplicando. Portanto, não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.

Assim, existem medidas que não podem ser escritas por meio de números racionais e, portanto, estamos diante de um problema que tem que ser resolvido. Temos que criar um outro tipo de número que seja capaz de expressar a medida de um segmento qualquer.

Segundo Caraça (1951), nos encontramos em uma situação um pouco peculiar, pois antes o nosso problema se restringia ao problema *prático* da medida enquanto que agora é a exigência da *compatibilidade lógica* entre o teorema de Pitágoras e a existência de um número que expressa uma determinada medida[3].

5 Incomensurabilidade

[3] Vale ressaltar que não estamos diante de um problema (teórico) de medida isolado, ou seja, existe uma infinidade de exemplos análogos que nos levam a criação de um outro tipo de número.

Quando dois segmentos de reta são tais que não conseguimos, com uma unidade de medida comum, expressar com múltiplos inteiros a medida dos dois segmentos, dizemos que eles são *incomensuráveis*. Na seção anterior, verificamos que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis. O que vamos constatar mais a frente é que o caso mais comum na medida é o da incomensurabilidade.

Como vimos através do exemplo 3 e de acordo com Lima *et al* (2004), o conjunto dos números racionais é insuficiente para traduzir as relações geométricas. Com o objetivo de resolver o problema da insuficiência dos números racionais, vamos estudar cuidadosamente as propriedades dos números racionais e as propriedades da reta para que possamos compará-las.

6 O Conjunto dos Números Racionais e os Pontos da Reta

Daqui por diante, quando nos referirmos ao conjunto dos números racionais (positivos), usaremos a letra $\mathbb{Q}_+$e ao conjunto dos pontos de uma reta, a letra $\wp$.

Vamos ver se podemos estabelecer uma correspondência entre esses dois conjuntos ($\mathbb{Q}_+$ e $\wp$) e, em caso afirmativo, verificar qual a natureza dessa correspondência.

Sejam *t* uma reta, *O* um ponto qualquer dela (o qual chamaremos de *origem*) e *A* um ponto tal que *OA* é a unidade de medida (ver figura 5). Seja *r* o número racional tal que $r = \frac{m}{n}$, em que *OA* foi dividido em n partes iguais e, a partir de *O*, para a direita, marcamos m dessas n partes, obtendo, assim, um ponto *B*. O número *r* é a medida do segmento *OB* tomando *OA* como unidade de medida. Para qualquer que seja $r = \frac{m}{n}$, essa operação pode ser efetuada e, além disso, o ponto *B* é único. Temos, portanto, que a correspondência $\mathbb{Q}_+ \rightarrow \wp$ é ***completa*** (isto é, podemos associar todos os elementos de $\mathbb{Q}_+$ aos pontos de uma reta) e ***unívoca*** (essa correspondência é única, porque se considerarmos apenas o lado positivo da reta, não existem dois segmentos distintos, partindo da mesma origem, com a mesma medida).

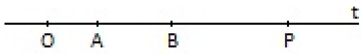

Figura 5: Correspondência $\mathbb{Q}_+ \to \wp$
Fonte: acervo pessoal

Contudo, sua recíproca $\wp \to \mathbb{Q}_+$ *não é completa*. Senão, vejamos: seja *P* um ponto qualquer da reta. Queremos encontrar a medida de *OP* usando a unidade *OA*. Se *OP* e *OA* forem incomensuráveis, não vai existir um número racional como estamos procurando. Portanto, a correspondência entre os números racionais e os pontos da reta não é uma correspondência biunívoca.

O que temos que fazer agora é determinar o que causou a falta de biunivocidade para que possamos resolver esse problema de medida. Para isso, vamos estudar as propriedades da reta (*infinidade, ordenação, densidade* e *continuidade*) e verificar se o conjunto $\mathbb{Q}_+$ goza de tais propriedades.

Infinidade

Tanto o conjunto $\wp$ dos pontos da reta como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais são infinitos. A infinidade de $\mathbb{Q}_+$ é facilmente verificada a partir da infinidade de $\mathbb{N}$, que está contido em $\mathbb{Q}_+$. Quanto à infinidade dos pontos da reta podemos observar que dados dois pontos quaisquer de uma reta, sempre existe um terceiro ponto entre esses dois. Esse procedimento pode ser feito indefinidamente, o que nos garante que os pontos da reta formam um conjunto infinito.

Ordenação

Dizemos que um conjunto é *ordenado* quando dados dois elementos desse conjunto podemos estabelecer qual elemento precede o outro. No caso dos conjuntos numéricos, podemos estabelecer a relação de ordem *menor que*. E, nesse sentido, o conjunto $\mathbb{Q}_+$ é um conjunto ordenado, pois dados dois elementos quaisquer podemos, de fato, compará-los e decidir qual é *menor que* o outro.

Quanto aos pontos da reta, podemos estabelecer a relação de ordem da seguinte maneira: dados dois pontos *A* e *B* em uma reta horizontal, dizemos que *A precede B* se *A* estiver à esquerda de *B*. Assim, o conjunto $\wp$ também é ordenado, pois dados dois pontos da reta quaisquer podemos decidir qual elemento precede o outro bastando para isso ver qual está à esquerda do outro. O conjunto $\wp$ é, portanto, ordenado[4].

Densidade

Vamos dizer que um conjunto é *denso* quando dados dois elementos quaisquer desse conjunto podemos encontrar infinitos elementos do conjunto entre eles. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, obviamente não é denso (basta verificar que entre dois números naturais consecutivos, 1 e 2, por exemplo, não existe outro natural). Já com relação ao conjunto dos pontos de uma reta, podemos pensar da seguinte maneira: Consideremos dois pontos distintos, *A* e *B*, que determinam sobre a reta um segmento *AB*. Se dividimos esse segmento ao meio, obtemos o ponto A_1; dividindo A_1B ao meio, obtemos A_2; dividindo A_2B ao meio, obtemos A_3; e assim sucessivamente. Criamos, portanto, uma sequência infinita de pontos A_i entre os pontos *A* e *B*. Logo o conjunto $\wp$ é denso.

E o conjunto $\mathbb{Q}_+$ é denso? Vejamos: dados dois números racionais r e s, podemos encontrar um outro racional entre eles: $\frac{r+s}{2}$. Procedendo da mesma maneira podemos encontrar um outro número racional agora entre r e $\frac{r+s}{2}$ (que obviamente estará entre r e s). Se continuarmos esse processo indefinidamente, encontraremos infinitos racionais entre r e s. Portanto, $\mathbb{Q}_+$ é um conjunto denso.

Continuidade

---

[4] A rigor, teríamos que mostrar que a injeção de $\mathbb{Q}_+$ na reta preserva a relação de ordem, mas omitiremos essa verificação para simplificar o problema.

Intuitivamente, a continuidade está relacionada com a ideia de ausência de saltos, de buracos. Uma excelente representação da continuidade é a reta. Portanto, se quisermos verificar se um conjunto é *contínuo* temos que verificar se ele tem a mesma estrutura da reta. Em caso afirmativo, esse conjunto goza da propriedade da continuidade.

O que nos falta agora é estabelecer um critério que possa determinar se a estrutura de um conjunto é ou não a mesma da reta. É isso que vamos fazer a seguir.

Cortes de Dedekind

Seja uma reta e um ponto *P* sobre ela. É fácil verificar que, em relação a *P*, todos os pontos da reta se dividem em duas classes: a classe (*E*) dos pontos que estão à esquerda de *P* e a classe (*D*) dos que estão à direita de *P*. O ponto *P* que divide as duas classes pode ser colocado em qualquer uma delas. A esse ponto damos o nome de *elemento de separação*.

Assim, sempre que podemos dividir os pontos da reta em duas classes de modo que: (i) todos os pontos da reta estão em uma das duas classes (isto é, não há exceção) e (ii) todo ponto de (*E*) está à esquerda de todo ponto de (*D*), temos um *corte*, que é denotado por (*E, D*).

Portanto, todo ponto da reta produz nela um corte. A questão é: a afirmação recíproca é verdadeira, isto é, quando tivermos um corte na reta, haverá sempre um ponto *Q* da reta que produza o corte? De acordo com o *Postulado de Dedekind-Cantor*, a resposta é *sim*. Esse postulado caracteriza a reta por meio dessa propriedade, em outras palavras, *todo corte da reta tem um elemento de separação*.

Logo, se quisermos saber se um conjunto goza ou não da continuidade temos que estabelecer nele o conceito de corte e verificar se existe ou não elemento de separação que pertença ao conjunto. Isto fará com que ele tenha a mesma estrutura da reta.

Agora voltemos a nossa questão inicial: O conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais (positivos) tem essa propriedade? Isto é, podemos estabelecer em $\mathbb{Q}_+$ o conceito de corte de modo que todo corte tenha um elemento de separação (assim como temos na reta)? Primeiro, vamos fixar o seguinte: quando na reta dizemos "...está à esquerda de ..." em números quer dizer "... é menor que ...". Assim, temos um corte em $\mathbb{Q}_+$ quando dividirmos esse conjunto em duas classes (*E*) e (*D*) tais que todo número racional está classificado em (*E*) ou (*D*) e todo número de (*E*) é menor que todo número de (*D*).

EXEMPLO 4. Um exemplo de corte em $\mathbb{Q}_+$ seria colocar em (*E*) todos os números racionais menores ou iguais a 10 e em (*D*) todos os números racionais maiores que 10. Obviamente, 10 é o elemento de separação desse conjunto. Será, então, que qualquer corte de $\mathbb{Q}_+$ tem elemento de separação?

EXEMPLO 5. Vejamos um segundo exemplo: seja (*E*) a classe onde estão todos os números racionais positivos cujo quadrado é menor que ou igual a 2 e (*D*) a classe onde estão todos os números racionais positivos cujo quadrado é maior que 2. Primeiramente, temos um corte em $\mathbb{Q}_+$ nesse caso? Veja que todo número racional (positivo) está em (*E*) ou (*D*) – basta que dado um número racional qualquer verifiquemos se o quadrado de tal número é maior ou menor que 2. Além disso, como $r^2 < 2 < s^2$ nos garante que $r < s$ então temos, de fato, um corte em $\mathbb{Q}_+$. Contudo, não existe um elemento de separação que pertence a $\mathbb{Q}_+$. Tal elemento que separa as duas classes seria o número cujo quadrado é 2, mas já vimos no exemplo 3 que esse número não é racional.

Portanto, o conjunto $\mathbb{Q}_+$ não é contínuo e assim, descobrimos a razão de não existir uma biunivocidade entre os conjuntos $\mathbb{Q}_+$ e $\wp$. Devemos, então, ampliar o conjunto dos números racionais, criando um novo conjunto no qual exista sempre o elemento de separação de qualquer corte em $\mathbb{Q}_+$.

Apesar do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais ser formado pela união dos conjuntos $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-\ e\ \{0\}$ (racionais positivos, negativos e o zero), estamos preocupados em entender esses números como uma medida, portanto, nos referimos sempre aos racionais positivos, mas as mesmas características que o conjunto $\mathbb{Q}_+$ apresenta, os racionais também apresentam.

7 NÚMEROS REAIS

7.1 Definição e Relação entre os Conjuntos

Vimos que a reta é um conjunto contínuo e que não podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre ela e $\mathbb{Q}$. Porém, temos uma correspondência unívoca e completa de $\mathbb{Q}$ na reta, ou seja, é como se na reta existissem mais elementos do que no conjunto $\mathbb{Q}$. O que vamos fazer agora é definir um tipo de número que *complete* os números racionais de modo a termos uma correspondência biunívoca com os pontos da reta.

Assim, chamaremos *número real* ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais. Se existir um número racional que separe as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existir tal número, o número real dir-se-á *irracional*.

Teremos, dessa maneira, uma biunivocidade entre os números reais e os pontos da reta.

Denotaremos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$.

7.2 Alguns Números Irracionais

No conjunto dos números racionais, a operação da radiciação é, muitas vezes, impossível de ser efetuada – na verdade, existem muitos mais casos onde é impossível do que onde é possível. Já no conjunto dos números reais (positivos), essa operação é sempre possível. Senão, vejamos.

Para encontrar a raiz *n*-ésima de um número racional (positivo) a temos que encontrar um racional b tal que $b^n = a$. E, muitas vezes, tal b não existe. Já no conjunto $\mathbb{R}$, atacamos o problema de outra maneira: façamos em $\mathbb{Q}$ um corte de modo que na classe (*E*) se encontram todos os racionais r tais que $r^n < a$ e na classe (*D*), todos os racionais s tais que $s^n > a$. Esse corte em $\mathbb{Q}$ define um número real t que divide as duas classes. Esse t pode ser racional ou irracional. Se ele for racional, deve ser tal que $t^n = a$; se for irracional, esse número é da forma $\sqrt[n]{a}$. Em ambos os casos, a raiz existe e a pergunta que se coloca, então, é: Será que os números irracionais são todos da forma $\sqrt[n]{a}$?

A resposta é *não*. Um pouco adiante, mostraremos como gerar uma infinidade de números irracionais diferentes desses. Existem alguns números irracionais famosos muito usados na matemática: o π (razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro) e o e, por exemplo.

7.3 Correspondência $\mathbb{R} \leftrightarrow \wp$

Na seção anterior, comparamos o conjunto dos números racionais com o conjunto dos pontos da reta, tentando verificar se esses conjuntos são equivalentes. O que constatamos é que eles não são (devido ao fato do conjunto $\mathbb{Q}$ não ser completo) e construímos um novo número (o número real) de modo a superar essa não biunivocidade.

Assim, baseado na nossa construção dos números reais, intuitivamente podemos dizer que a correspondência entre os números reais e os pontos da reta é biunívoca, isto é, existe uma equivalência entre os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\wp$ ($\mathbb{R} \leftrightarrow \wp$).

Observe que estamos falando da equivalência entre conjuntos de naturezas diferentes: um é um conjunto numérico, o outro, um conjunto geométrico. Podemos, portanto, a cada número real associar um ponto da reta e vice-versa.

Considerações finais

Pelo que vimos, apresentar o conjunto dos números reais como um simples conjunto que engloba outros dois (racionais e irracionais) é reduzir a importância e relevância desse assunto na matemática, além de desestimular os alunos fazendo com que eles acreditem que a matemática é algo estático e sem necessidade.

Neste trabalho, apresentamos esses números como uma criação humana que surge de uma necessidade social – a medição. Nesse sentido, a matemática torna-se mais atraente aos alunos, pois os faz ver que somos sujeitos da história e não simplesmente espectadores, uma vez que a matemática pode ser criada por nós a partir de nossas necessidades.

Com a proposta apresentada nesse trabalho, entendemos que é necessário e possível ensinar os números reais sem, simplesmente, classificar os números em diferentes tipos, mas mostrando como a necessidade impõe a criação dos vários conjuntos numéricos. É possível, ainda, discutir com os alunos a existência de diferentes tipos de infinito e o que isso implica, por exemplo, no estudo das funções.

Portanto, cabe a nós, professores de matemática do ensino médio, mudarmos nossa postura no que diz respeito ao ensino da matemática. Não podemos mais repetir o que os livros didáticos nos “ensinam”. Temos que aprender a ser leitores críticos desses livros que estão por aí para que possamos melhorar, de fato, o ensino de matemática nas escolas brasileiras.

Referências

Ávila, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2001.

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

Hefez, Abramo. *Elementos de Aritmética*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2011.

Lima, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. v.1. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2004.

Ripoll, Cydara C. *A construção dos números reais nos ensinos fundamental e médio*. II Bienal da SBM, Salvador, 2004. Disponível em http://www.bienasbm.ufba.br/M54.pdf.