




Produto educacional

Covariação e o conceito de função: objetos dinâmicos**Covariation and the concept of function: dynamic objects****Covariación y el concepto de función: objetos dinámicos**Jeferson Moizés Lima¹ [0000-0002-6456-8645]Ivanete Zuchi Siple² [0000-0002-8640-1336]Rogério de Aguiar³ [0000-0002-9372-3528]**Resumo**

Este texto é oriundo de um trabalho de investigação sobre o ensino e aprendizagem do conceito de função com uma abordagem dinâmica de covariação, desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina. Para tanto, o referencial teórico apresenta a forma como o conceito de função vem sendo abordado e a necessidade de se disponibilizar aos alunos atividades em contextos dinâmicos, ou seja, por meio de objetos de aprendizagem a partir dos quais o estudante possa prever, por intermédio de situações-problemas, o comportamento de grandezas que se modificam ao longo do tempo. Nessa perspectiva, desenvolvemos um produto educacional, um material não convencional como o livro didático, mas sim, um livro dinâmico, denominado “COVARIAÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos”. Nele está inserido atividades que permitem explorar diferentes representações de um mesmo objeto matemático conectados de maneira dinâmica e vinculados ao raciocínio covariacional. Uma das atividades desse produto educacional foi experimentada em uma turma de Ensino Médio. Os resultados alcançados indicam contribuições positivas desse produto educacional para o desenvolvimento do raciocínio covariacional do aluno, no que tange a aprendizagem do conceito de função. Além disso, as atividades inseridas no livro, possuem a intencionalidade de proporcionar, além de simulação de situações-problemas, a transformação concomitante de diferentes registros de representação semiótica, permitindo ao aluno, articular a visualização e a experimentação em um mesmo ambiente, ou seja, na mesma janela de visualização, algo que no ambiente do lápis e do papel seria limitado.

Palavras-chave: Conceito de função; Covariação; GeoGebrabook.

¹ jefemat@hotmail.com, mestre em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, doutorando em Educação no Programa de Pós-Graduação (FAED) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Florianópolis/Santa Catarina/Brasil.

² ivanete.siple@udesc.br, doutora em Engenharia de Produção, professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do Departamento de Matemática - Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville/Santa Catarina/Brasil.

³ rogerio.aguiar@udesc.br, doutor em Matemática Aplicada, professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do Departamento de Matemática - Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville/Santa Catarina/Brasil.

Abstract

This text comes from research work on teaching and learning the concept of function with a dynamic covariation approach, developed in the Postgraduate Program in Science, Mathematics and Technology Teaching at the State University of Santa Catarina. To this end, the theoretical framework presents the way in which the concept of function has been approached and the need to make activities available to students in dynamic contexts, that is, through learning objects from which the student can predict, through of problem situations, the behavior of quantities that change over time. From this perspective, we developed an educational product, a non-conventional material such as a textbook, but rather a dynamic book, called "COVARIATION AND THE CONCEPT OF FUNCTION: dynamic objects". It includes activities that allow you to explore different representations of the same mathematical object, connected in a dynamic way and linked to covariational reasoning. One of the activities in this educational product was tried out in a high school class. The results achieved indicate positive contributions of this educational product to the development of the student's covariational reasoning, regarding learning the concept of function. Furthermore, the activities included in the book have the intention of providing, in addition to simulating problem situations, the concomitant transformation of different registers of semiotic representation, allowing the student to articulate visualization and experimentation in the same environment, i.e. , in the same viewing window, something that in the pencil and paper environment would be limited.

Keywords: Function concept; Covariation; GeoGebra book.

Resumen

Este texto surge de un trabajo de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función con un enfoque de covariación dinámica, desarrollado en el Programa de Postgrado en Enseñanza de Ciencias, Matemáticas y Tecnología de la Universidad Estadual de Santa Catarina. Para ello, el marco teórico presenta la forma en que se ha abordado el concepto de función y la necesidad de poner a disposición de los estudiantes actividades en contextos dinámicos, es decir, a través de objetos de aprendizaje a partir de los cuales el estudiante pueda predecir, a través de situaciones problemáticas, el comportamiento de cantidades que cambian con el tiempo. Desde esta perspectiva, desarrollamos un producto educativo, un material no convencional como un libro de texto, sino más bien un libro dinámico, llamado "COVARIACIÓN Y EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: objetos dinámicos". Incluye actividades que permiten explorar diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, conectadas de forma dinámica y vinculadas al razonamiento covariacional. Una de las actividades de este producto educativo se probó en una clase de secundaria. Los resultados alcanzados indican aportes positivos de este producto educativo al desarrollo del razonamiento covariacional del estudiante, en lo que respecta al aprendizaje del concepto de función. Además, las actividades incluidas en el libro tienen la intención de proporcionar, además de simular situaciones problemáticas, la transformación concomitante de diferentes registros de representación semiótica, permitiendo al estudiante articular visualización y experimentación en un mismo entorno, es decir, en el mismo visionado. ventana, algo que en el entorno del lápiz y papel sería limitado.

Palabras claves: Concepto de función; Covariación; Libro GeoGebra.

1 Introdução

O conceito de função pode ser entendido como a variação dos valores de duas quantidades que ocorre simultaneamente. Essa compreensão exige do aluno um raciocínio covariacional, isto é, a "capacidade de alguém pensar em uma imagem sustentada de valores de duas grandezas (magnitudes) simultaneamente" (Thompson; Carlson, 2017, p.426,

tradução nossa). Para que isso ocorra, é necessário proporcionar atividades em contextos dinâmicos, ou seja, por meio de objetos de aprendizagem a partir dos quais o estudante possa prever, por intermédio de situações-problemas, o comportamento de grandezas que se modificam ao longo do tempo.

O autor 1, professor de Matemática no Ensino Médio há mais de dez anos, tem percebido que os recursos pedagógicos utilizados para ensinar função são: o método clássico no ambiente do lápis e do papel e softwares educacionais para visualização de gráficos. No entanto, esses recursos não oferecem todas as possibilidades que um software de geometria dinâmica, como o GeoGebra⁴, dispõe. Nele é possível simular o que uma determinada situação-problema sugere e ainda possibilitar ao estudante investigar, avaliar, prever e validar suas hipóteses, auxiliando-o na construção de significados e possibilitando a ele raciocinar covariacionalmente.

Outro aspecto relevante no ensino e aprendizagem de função é a abordagem que os livros didáticos brasileiros de Matemática apresentam. Inicialmente, define-se relação com base no produto cartesiano para, depois, chegar ao conceito de função. Assim, é levado em conta o formalismo algébrico, muitas vezes negligenciando-se a intuição associada a esse conceito. Diante desse panorama, cabe aos autores e professores de Matemática a exploração de abordagens alternativas no Ensino Médio, reconhecendo que o raciocínio desempenha um papel tão crucial quanto o formalismo. Corroborando com essa ideia, Ávila (2006, p.38) afirma que:

O ensino de funções, como vemos em vários livros, [...] está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizada. O excesso de “conjuntos” continua presente em vários livros, “entulhando” o currículo. Tudo isso pode ser reduzido substancialmente e com vantagens, beneficiando o bom aprendizado das ideias matemáticas. São as ideias que devem ser enfatizadas, a linguagem e a notação somente quando necessárias para o objetivo de introduzir novas ideias.

Da mesma forma, Andrade e Kaiber (2014), cerca de dez anos depois, apontam que:

A introdução do conceito de função aos estudantes da Educação Básica continua sendo realizada considerando a ideia de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos. Ainda, essa abordagem baseada na teoria dos conjuntos aliada à tradicional organização linear do currículo de Matemática transformou o estudo das funções, no Ensino Médio [...] em algo extremamente formal e abstrato (Andrade e Kaiber, 2014, p. 2).

Na prática docente, observa-se o desafio enfrentado pelos alunos ao interpretarem as situações apresentadas por funções. Possivelmente uma das dificuldades reside ao fato de que, ao utilizar um material que se limita à representação algébrica, a percepção do estudante sobre funções tende a tornar-se estática em relação a situações de experimentação dinâmica. Em outras palavras, é difícil para o estudante compreender a natureza dinâmica de uma função, a menos que considere valores de duas quantidades variando simultaneamente.

Dentro desta perspectiva, nos questionamos: de que forma objetos de aprendizagem, no GeoGebra, possibilitam explorar o conceito de função na perspectiva da covariação?

⁴ <https://www.geogebra.org>

Ao cursar o mestrado em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias no Programa de Pós-Graduação da Universidade Estadual de Santa Catarina (UDESC), o qual tem o objetivo de promover qualificação profissional, mediante estudos e reflexões teórico-conceituais, teórico-metodológicos e prático-pedagógicos, além de capacitar os mestrandos para a elaboração e utilização de distintos recursos didáticos, baseados em perspectivas pedagógicas inovadoras, tive a oportunidade de pesquisar sobre essa temática e criar um produto educacional não convencional como o livro didático, mas sim um produto que contempla, em um mesmo ambiente, a interação e a visualização dinâmica. Assim, o professor contará com mais uma alternativa para explorar ideias referentes ao conceito de função, possibilitando o despertar do raciocínio covariacional.

Esse produto educacional é um livro dinâmico, ou seja, nos objetos de aprendizagem, a partir da simulação, acontecem mudanças na representação tabelar ou gráfica, que não ocorrem no ambiente estático lápis e papel, propiciando característica importante desse tipo de recurso, como “fato de se integrarem dinamicamente, numa mesma página, as diferentes representações dos objetos da Matemática. Ou seja, quando se está explorando um objeto matemático, as diferentes representações desse objeto não apenas aparecem simultaneamente, mas se apresentam conectadas” (Nóbriga; Siple, 2020, p.90).

Ele foi elaborado na opção de livro on-line disponibilizado no site do GeoGebra, denominado como GeoGebraBook. Este livro, foi intitulado “COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos⁵”. Para ter acesso basta utilizar o link do produto educacional, pesquisar pelo nome do produto no próprio site do GeoGebra ou até mesmo pesquisando no Google. Assim, o professor/usuário, ao acessar o livro, encontrará uma página inicial (Figura 1) e poderá se direcionar ao capítulo desejado. Além disso, poderá salvar os arquivos e utilizá-los de modo off-line. A forma de utilizar/explorar os recursos não precisa ser linear, o usuário pode escolher a maneira em função dos seus próprios interesses e objetivos.

Figura 1: Layout da página inicial do produto educacional

The screenshot shows the GeoGebraBook interface. On the left is a vertical navigation menu with the following items: COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO (highlighted), APRESENTAÇÃO, SUGESTÕES PARA OS PROFESSORES, COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA, BOLAS DE GOLFE, ALTURA DO EDIFÍCIO, CAIXA D'ÁGUA, ALUGUEL DE BICICLETAS, REPRESA DE ÁGUA, LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS, SINALIZADOR, MANUAL, DEIXE SUA OPINIÃO, and REFERÊNCIAS. The main content area displays the title 'COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos' by Jeferson Lima. Below the title, it states the author and provides a brief description of the educational product, mentioning its development for a master's thesis at UDESC. The UDESC logo is present, along with the text 'PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS'. Below this, the title 'COVARIÇÃO E O CONCEITO DE FUNÇÃO: objetos dinâmicos.' is repeated, followed by the author's name and the year 'JOINVILLE, 2019'. At the bottom, there is a 'Tabela de Conteúdos' section with three items: APRESENTAÇÃO, Apresentação, Sobre os autores, and Descrição do Produto Educacional.

Fonte: Lima, 2019a, p. 72.

⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qdk8tjem> Acesso em: 11 ago de 2023.

A escolha do software GeoGebra para a elaboração deste material foi motivada pelas potencialidades das ferramentas que oferece para o desenvolvimento de objetos, possibilitando a integração dinâmica de suas representações. Conforme Nóbriga e Siple (2020) afirmam, a compreensão do termo "dinâmico" refere-se a algo que se modifica de maneira contínua, e no GeoGebra, essa dinamicidade está associada ao princípio de manipulação direta. Dessa forma, ao manipular o objeto com o auxílio do mouse ou do touch screen, é possível visualizar os efeitos dessas ações, o que contribui para a percepção das relações e da transição entre as diferentes representações.

Nesse contexto, as atividades inseridas nesse livro contemplam uma situação-problema, um *applet* e uma sequência de questões. Para tal, foram utilizadas e adaptadas atividades do livro "Matemática: 1º ano" de Santos e Inafuco (2017), utilizado pelo primeiro autor em sala de aula. Os *applets* foram desenvolvidos para cada situação-problema, propostos para serem utilizados no ensino e aprendizagem do conceito de função, vinculados ao despertar do raciocínio covariacional dos estudantes no Ensino Médio.

A experimentação envolveu alunos do primeiro ano do Ensino Médio em uma escola catarinense, focando em uma situação-problema relacionada à taxa de variação do nível de água em um copo cilíndrico em função do número de bolas presentes. A escolha dessa situação decorreu do estágio inicial dos estudos dos alunos sobre funções. O objeto de aprendizagem utilizado para simular essa situação-problema foi selecionado para facilitar a compreensão do conceito de função sob a ótica de variação, pois estão associados a eventos dinâmicos.

A análise dessa experimentação teve suporte teórico para constituição do produto educacional e para relevância da atividade proposta por Carlson et al. (2003) e a teoria de representação semiótica à luz de Raymond Duval (2015), a qual poderá ser consultada na dissertação que se refere esse Produto Educacional, intitulada: "OBJETOS DINÂMICOS DE APRENDIZAGEM PARA EXPLORAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA PERSPECTIVA DA COVARIÇÃO" (Lima, 2019b).

2 Metodologia

Caracterização e Contextualização da Pesquisa

Esta é uma pesquisa de caráter qualitativa Bogdan e Biklen (1994) visto que esta abordagem não se preocupa com a quantificação dos objetos de estudo, mas sim, com o aprofundamento da compreensão de dados coletados. Trata-se de um recorte de uma pesquisa desenvolvida em nível de pós-graduação, sob coordenação do primeiro autor e orientação da segunda autora, cujo objetivo geral era investigar de que forma objetos de aprendizagem, no GeoGebra, possibilitam explorar o conceito de função na perspectiva da covarição.

De frente a isso, estabeleceu-se alguns objetivos específicos, dentre os quais, a implementação de situações-problemas, retiradas do ambiente estático do livro e utilizado pelos participantes da pesquisa, para adaptação ao ambiente do GeoGebra em Atividades, um recurso para ser utilizado de forma on-line. Dessa forma, foram construídos objetos de aprendizagem para aplicá-los aos alunos e investigar além das aprendizagens por eles propiciados (o conceito de função na perspectiva da covarição) o funcionamento desses objetos no ambiente do GeoGebra.

Contexto da Prática

O objeto de aprendizagem foi aplicado em uma turma de 1º ano do Ensino Médio, no primeiro semestre de 2018, em uma escola catarinense, com 36 alunos, grupo em que o pesquisador era professor de Matemática e cujos responsáveis expressaram concordância na participação na pesquisa por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

A aplicação do objeto de aprendizagem foi realizada em dois momentos. O primeiro consistiu no cadastro dos alunos na plataforma do GeoGebra, inclusão dos seus usuários na ferramenta Grupo, a qual o seu funcionamento está descrito em Lima (2019b, p. 48), em um tempo de 50 minutos. Para este momento foram utilizados pelo pesquisador: projetor multimídia, internet e quadro de vidro para explicar como os alunos iriam proceder para sua inclusão no Grupo criado para esta prática. Após as explicações, foi solicitado aos alunos que possuíam equipamento digital (*notebook, tablet e smartphone*) que utilizassem a sala de aula em frente ao laboratório e aos que não possuíam que permanecessem no laboratório de informática. Dezesesseis alunos possuíam material digital e vinte não. Esta divisão dos alunos ocorreu para que fosse possível verificar o funcionamento do objeto de aprendizagem nos dispositivos móveis e nos computadores de mesa. Como a sala de aula era em frente ao laboratório, o professor pode circular entre os dois ambientes observando os alunos e fazendo os registros necessários no diário de bordo.

O segundo momento, em dois tempos de 50 minutos cada, consistiu na realização da atividade e da discussão com o grupo sobre o *feedback* dado pelo professor quanto às respostas elaboradas pelos participantes. Esse *feedback* era acessado pelos participantes da pesquisa no perfil individual de cada um na plataforma do GeoGebra.

Para coleta dos dados da experimentação foram efetuados: observação com registro em diário de bordo (caderno onde escrevemos as informações relevantes à prática (quantidades de participantes, quantos utilizaram computador, quantos notebooks, quantos tablets, quantos celulares, discussão entre os participantes, entre outras), registro das resoluções desenvolvidas pelos alunos que ficaram armazenadas na ferramenta Grupo do GeoGebra on-line no perfil do pesquisador e registros fotográficos.

O objeto de aprendizagem utilizado na prática recebeu o nome de “Bolas de Golfe”⁶ (Figura 02). A prática teve dois propósitos, analisar o funcionamento operacional da Atividade na plataforma on-line do GeoGebra e o raciocínio covariacional dos participantes durante a realização da atividade proposta, a qual teve como objetivos: a identificação de variáveis envolvidas; a visualização da função em diferentes registros de representação; o estabelecimento de conjecturas com base na simulação apresentada e a obtenção da lei de formação da função.

⁶ Link de acesso em: <https://www.geogebra.org/m/bjhQXu9V> Acesso em: 05 de ago. de 2023

Figura 2 – Objeto de Aprendizagem - Bolas de Golfe

GeoGebra

A Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de golfe idênticas em um copo com água até certo ponto e medir o nível da água. Utilize o applet abaixo para responder as questões solicitadas.

B Animação Parar Animação

C

D Reiniciar

Número de Bolas (x)	Nível de Água (y)
0	9

Nível da água (y)

Nível de Água em cm

Número de bolas (x)

Parte 1

a) Quais as variáveis envolvidas no experimento?
Type your answer here...

b) Qual o nível inicial da água?
Type your answer here...

c) Os dados da simulação, foram representados graficamente. O número de bolas de golfe representa uma variável independente. Dessa forma o intercepto, no eixo, que representa o nível da água é de quantos centímetros? Justifique.
Type your answer here...

d) Qual a taxa de variação média do nível da água em relação ao número de bolas de golfe?
Type your answer here...

e) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre o nível da água e o número de bolas. Essa relação é uma função? Justifique.
Type your answer here...

f) É possível adicionarmos mais uma bola de golfe no copo? Justifique.

Parte 2

Supondo que queremos alterar o valor da taxa média no nível da água em relação ao número de bolas no experimento dado. Quais condições aumentaria o valor dessa taxa média? Marque a(s) opção(ões) correta(s).

Check all that apply

- Diminuir o diâmetro do copo de vidro.
- Soltar duas bolas no copo ao mesmo momento.
- Adicionar 6 centímetros de água ao copo.
- Adicionar bolas de golfe no copo de vidro a uma taxa média mais rápida.
- Usar bolas de golfe maiores.

✓ CHECK YOUR ANSWER

Parte 3

Se repetíssemos a simulação, porém com um copo de vidro diferente e supondo que o novo copo de vidro terá um raio menor que o original. A taxa média com relação ao nível da água muda? Justifique.
Type your answer here...

Fonte: Próprio autor, 2023.

As questões propostas foram elaboradas pelo autor e configuradas em três etapas. Entretanto antes de respondê-las os alunos deveriam fazer a leitura da situação apresentada (Figura 2 – A). Após esse momento, precisariam clicar no botão “Animação” (Figura 2 – B) para que a simulação iniciasse e pudessem apreciar as bolas de golfe caírem no tubo cilíndrico. Nesse mesmo instante seria possível “ver” o nível da água sendo alterado e, no mesmo instante a representação dessa alteração sendo apresentada em tabela, que mudava a cada bola que caía. Também foi possível verificar essa mudança graficamente. Os alunos poderiam parar a simulação clicando no botão “Parar Animação” (Figura 2 – C) ou ainda reiniciar, clicando no botão “Reiniciar” (Figura 2 – D).

Modo de análise dos dados

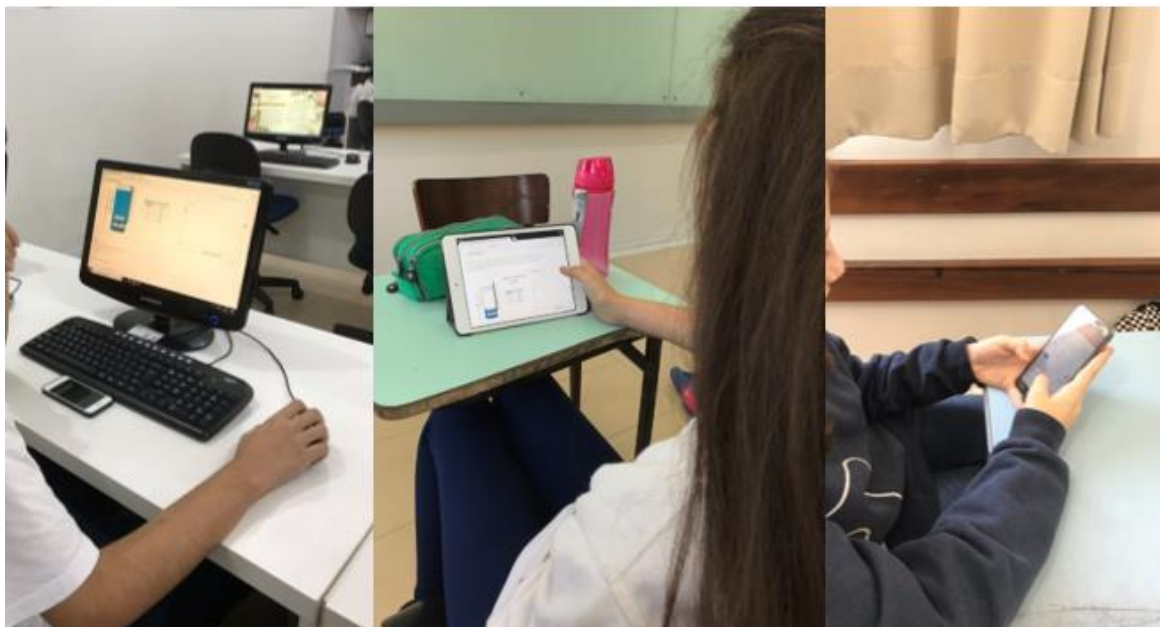
Para análise do funcionamento do objeto de aprendizagem foram utilizadas as observações registradas no diário de bordo do pesquisador. Quanto a análise dos registros escritos pelos participantes, armazenados na ferramenta Grupo, foram levados em consideração o quadro conceitual proposto por Carlson et al. (2003) e a teoria de representação semiótica à luz de Raymond Duval (2015). Vale reforçar que o objetivo desta análise era levantar indícios se o objeto de aprendizagem proposto na experimentação contribuiria para a compreensão do conceito de função no viés do raciocínio covariacional. Os participantes foram referidos, quando necessário, por identificadores A (1, 2, 3, ...,36) com objetivo de preservar as suas identidades.

3 Discussão dos resultados

Em relação ao acesso no objeto de aprendizagem, o objetivo foi atingindo, pois notamos que os alunos não encontraram dificuldades ao se cadastrarem na plataforma on-line do GeoGebra para acessar esse objeto. O fato de todos os alunos possuírem um e-mail pessoal facilitou a criação de perfis individuais para cada um.

A aplicação do objeto de aprendizagem levou à constatação que a Atividade funcionou adequadamente tanto nos computadores de mesa, com os alunos que utilizaram o laboratório de informática, quanto com os alunos que utilizaram o *tablet e smartphone* (Figura 03). Ou seja, a execução aconteceu satisfatoriamente e os alunos puderam visualizar as simulações e representações matemáticas propostas na atividade.

Figura 3: Alunos acessando as folhas de trabalho em computador de mesa, tablet e smartphone



Fonte: Lima, 2019b, p. 72.

Outro fator importante que constatamos, se refere à simulação das situações-problema propostas. Ao contrário do livro físico, no qual essas situações são estáticas, no ambiente do GeoGebra, os alunos conseguiram visualizar dinamicamente o que estava ocorrendo. Além disso, de maneira concomitante, puderam perceber os diferentes registros

de representação do objeto em questão. Isso proporcionou uma experiência mais rica e interativa, permitindo uma melhor compreensão das relações matemáticas envolvidas.

Esse resultado sugere que os objetos de aprendizagem no GeoGebra têm o potencial de facilitar a exploração do conceito de função na perspectiva da covariação. Isso ocorre porque, no momento em que o aluno visualiza, por exemplo, as bolas de golfe caindo no cilindro e, como consequência, o nível da água se alterando, é possível perceber dinamicamente essas mudanças na simulação, na representação tabelar e na representação gráfica. Essa abordagem, apresentando diferentes representações de um mesmo objeto matemático, pode favorecer a compreensão do conceito de função pelos alunos. Além disso, Duval (2017) sugere que sejam disponibilizadas aos alunos atividades que requeiram, **sempre**, a mobilização sinérgica de dois, às vezes de três registros de representação. Esse fato se comprova em análise às respostas dos alunos A1, A3 e A7 (Figura 04) em que cada um deles parece ter utilizado um tipo de representação para responder ao questionamento.

Figura 4: Resposta escrita pelos participantes A1, A3 e A7.

b) Qual o nível inicial da água? → **A1**

A 9 cm, de acordo com a medição apresentada na animação.
f_x

b) Qual o nível inicial da água? → **A3**

A O nível inicial da água é 9 cm conforme representado na tabela.
f_x

b) Qual o nível inicial da água? → **A7**

A 9 cm é o nível inicial da água representado graficamente.
f_x

Fonte: Acervo do autor 1.

Respostas dos Participantes

Foram selecionadas as respostas que poderiam prover informações para análise de um material que favoreça a compreensão do conceito de função na perspectiva da covariação, ou seja, atrelado ao raciocínio covariacional, constituindo assim, o *corpus* da investigação. Categorizamos (Quadro 01) a sequência de questões contidas na atividade em cinco categorias levando em consideração o quadro conceitual proposto por Carlson et al. (2003).

Quadro 1: Descrição dos agrupamentos relativos às perguntas e às categorias

Categorias	Questões Propostas
A	Quais as variáveis envolvidas no experimento? Qual o nível inicial da água?
B	Qual a taxa de variação média do nível da água em relação ao número de bolas de golfe?
C	Os dados da simulação foram representados graficamente. O número de bolas de golfe representa uma variável independente. Dessa forma o intercepto, no eixo, que representa o nível da água é de quantos centímetros? Justifique.
D	Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre o nível da água e o número de bolas. Essa relação é uma função? Justifique. É possível adicionarmos mais uma bola de golfe no copo? Justifique.
E	Se repetíssemos a simulação, porém com um copo de vidro diferente e supondo que o novo copo de vidro terá um raio menor que o original. A taxa média com relação ao nível da água muda? Justifique.

Fonte: Próprio autor.

Na categoria A, constatou-se que dos 36 participantes da pesquisa, 35 conseguiram identificar as variáveis envolvidas e determinar o nível inicial da água. É relevante mencionar que, durante a realização da atividade, o pesquisador circulou entre os alunos, registrando observações no diário de bordo. Através dos comentários dirigidos ao pesquisador, foi perceptível que alguns alunos identificaram as variáveis ao visualizar a tabela, enquanto outros o fizeram por meio do gráfico, evidenciando a importância da apresentação de diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Adicionalmente, observou-se que a identificação do nível inicial da água ocorreu de maneira mais facilitada pela visualização da simulação. Dessa forma, verifica-se que, por meio dessas questões e da apresentação diversificada de representações de uma função, os alunos podem desenvolver a habilidade de identificar as variáveis envolvidas, neste caso, as grandezas "número de bolas" (x) e "nível da água" (y) — uma fase essencial para posteriormente reconhecer a taxa de variação simultânea (Thompson; Carlson, 2017).

Na proposta da pergunta que contemplava a categoria B, sobre qual a taxa de variação média do nível da água em relação ao número de bolas de golfe, todos os 36 participantes responderam corretamente. A resposta do aluno A10 (Figura 05) exemplifica o nível de entendimento que todos os alunos apresentaram. Pode-se inferir que este aluno, para descobrir a taxa de variação média, registrou o nível da água antes de a bola de golfe cair e, após visualizar uma delas caindo e provocando a mudança no nível da água, é provável que tenha subtraído o nível atual da água pelo valor que havia registrado anteriormente.

Ao responderem essa questão, foi notória a importância do objeto de aprendizagem que simulou a situação-problema, pois, enquanto os alunos respondiam, muitos deles colocavam o dedo sobre o copo cilíndrico para medir o quanto a água subiu depois de a bola ter caído. Essa questão pode contemplar indícios de “consciência da quantidade de variação do valor da saída, enquanto a variação no valor de entrada é considerada” (Carlson et al. 2003, p. 128, tradução nossa).

Figura 5: Exemplo de uma resposta do aluno A10

d) Qual a taxa de variação média do nível da água em relação ao número de bolas de golfe?	
$\frac{A}{f_x}$	A taxa de variação é de 1,2. É possível chegar a este resultado diminuindo o valor do nível da água após adicionar uma bolinha pelo valor inicial da água.

Fonte: Acervo do autor 1.

A figura 06 apresenta uma questão e duas respostas, uma correta e outra incorreta relacionada à categoria C. Nesta categoria, os participantes da pesquisa foram desafiados a analisar os dados da simulação no gráfico e identificar o ponto de intercepto no eixo que representa o nível da água, além de compreender o significado dessa interseção na situação-problema. Observa-se que, dentre todos os participantes, apenas cinco responderam de forma incorreta. Esses resultados corroboram a ideia apresentada por Duval (2015), que destaca que os programas computacionais oferecem inovações, sendo a mais fascinante delas "o poder de visualização que é estendido para todos os domínios do conhecimento" (Duval, 2015, p.07, grifo do autor).

É provável que os 31 participantes tenham respondido corretamente devido à utilização de outras formas de representação além da gráfica, uma vez que esses alunos tinham pouca experiência prévia com o estudo de função. Então, parece que o raciocínio do aluno se baseou na observação das imagens visuais oferecidas pela simulação no GeoGebra, visto que na resposta do aluno A10 ele escreve que: "*o dado foi obtido pois no recipiente já havia uma quantidade de 9 cm de água*".

Portanto, destaca-se a importância de oferecer diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, permitindo que os alunos reconheçam e transitem entre tais representações.

Figura 6: Exemplo de uma resposta correta do aluno A10 e outra incorreta do aluno A12

c) Os dados da simulação, foram representados graficamente. O número de bolas de golfe representa uma variável independente. Dessa forma o intercepto, no eixo, que representa o nível da água é de quantos centímetros? Justifique.

$\frac{A}{f_x}$	O intercepto no eixo no qual representa o nível da água é de 9 cm. Este dado foi obtido pois no recipiente utilizado já havia uma quantidade de 9 cm de água, de acordo com a função mostrada pelo problema. Temos um par ordenado de (0,9), ou seja, sempre que o numero de bolas(X) for 0, haverá um intercepto cortando sobre Y.
-----------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

c) Os dados da simulação, foram representados graficamente. O número de bolas de golfe representa uma variável independente. Dessa forma o intercepto, no eixo, que representa o nível da água é de quantos centímetros? Justifique.

$\frac{A}{f_x}$	o intercepto é de 6,40 cm,
-----------------	----------------------------

Fonte: Acervo do autor 1.

Na categoria D, foram propostas duas perguntas. A primeira que solicitava aos participantes que analisasse as representações (tabela e gráfico) da simulação, para estabelecer uma relação entre o nível da água e o número de bolas, além de justificar se essa relação era ou não uma função. E a segunda indagava se era possível adicionar mais uma bola no copo. Com referência à primeira pergunta, dinamicamente, os alunos podiam acompanhar os resultados apresentados na tabela, confirmando o ponto em questão no gráfico. Essa é uma excelente possibilidade que o GeoGebra proporciona para representar funções associadas a eventos dinâmicos. Contudo, pode-se verificar que dez alunos responderam de forma incorreta, sugerindo possivelmente um raciocínio covariacional pouco desenvolvido em relação aos que responderam corretamente, conforme ilustrado na Figura 07.

Figura 7: Exemplo de resposta correta do aluno A4

e) Analisando as representações (em tabela e gráfica), da simulação, você consegue estabelecer uma relação entre o nível da água e o número de bolas. Essa relação é uma função? Justifique.

A f_x	Vale lembrar que função relaciona dois conjuntos A e B, de modo que A possua uma única relação em B. Como mostrado na situação problema, o volume de água (Y) é em função do número de bolas (X). Sabemos que o número de bolas é uma variável independente, analisando a tabela, é possível verificar que a um aumento de 1,2 cm sob cada bolinha adicionada. Representamos deste modo: $f(x) = 9 + 1,2 \cdot X$
-------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Acervo do autor 1.

Quanto à segunda pergunta, o aluno precisava raciocinar covariacionalmente, ou seja, como ele já havia identificado a taxa de variação média, bastava associar o número de bolas no copo ao nível de água subindo e assim perceber as duas grandezas variando simultaneamente. Na Figura 08, percebe-se pela resposta do aluno A18 que ele chegou a essa conclusão, o que reforça que a pergunta pode proporcionar ao professor indícios de que o aluno realizou um raciocínio covariacional, já que, reconhece-se esse raciocínio quando “um estudante pode imaginar todo o processo sem ter que executar cada ação” (Oehrtman; Carlson; Thompson, 2008, p. 10, tradução nossa). Destaca-se que o aluno A18 utilizou a palavra ‘prever’, indicando que ele conseguiu antecipar o que aconteceria.

Figura 8: Exemplo de resposta com sinais de que o aluno A18 teve uma visão de processo

f) É possível adicionarmos mais uma bola de golfe no copo? Justifique.

A f_x	Sim, mas a água vai transbordar. Posso prever isso por meio da função, pois se cada bola faz aumentar 1,2cm no volume da proveta, portanto partindo de 13,8 e somando com 1,2cm, esse número (15cm) ultrapassa a capacidade da proveta, que é de 14,5cm.
-------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

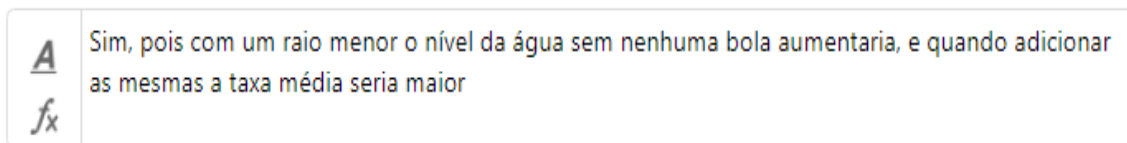
Fonte: Acervo do autor 1.

Na categoria E, perguntou-se aos participantes (Figura 09): se eles repetissem a simulação, porém com um copo de vidro diferente e supondo que o novo copo de vidro tenha um raio menor que o original, a taxa média com relação ao nível da água mudaria?

Essa pergunta exige que o aluno realize um raciocínio covariacional mais abrangente, visto que ele precisa considerar os itens respondidos anteriormente e identificar outra taxa de variação em virtude do novo copo de vidro, que apresenta um raio menor. Com isso, ele precisa raciocinar sobre possíveis relações entre quantidades e compreender que sua resposta não depende de uma regra específica. Nesta questão foram obtidas 21 respostas corretas, 10 incorretas e 5 não respondidas.

Figura 9: Exemplo da pergunta envolvendo um raciocínio covariacional maior e a resposta do aluno A6

Se repetíssemos a simulação, porém com um copo de vidro diferente e supondo que o novo copo de vidro terá um raio menor que o original. A taxa média com relação ao nível da água muda? Justifique.



Fonte: Acervo do autor 1.

Como esta questão contemplou um raciocínio mais abrangente do processo, exigindo que o aluno considerasse uma nova taxa média de variação devido à mudança no raio do copo de vidro, seria pertinente solicitar a representação gráfica. Isso se justifica pelo fato de que o aluno precisa ter consciência da mudança do ângulo da reta que representaria a nova situação proposta.

Com isso, percebemos por meio das observações e anotações feitas enquanto os participantes desenvolviam a resolução da situação-problema, e da análise das respostas registradas na ferramenta Grupo, que foi possível verificar que a atividade não apenas facilitou a compreensão do conceito de função na perspectiva da covariação, mas também serviu como: recurso semiótico dinâmico, permitindo representações diferentes de um mesmo objeto; facilitador, para percepção da covariação existente entre duas grandezas simultaneamente; simulador, permitindo articular a visualização e a experimentação; integrador virtual entre aluno e professor. Nesse contexto, é possível concluir que esse conjunto de procedimentos pode facilitar o ensino e aprendizagem de matemática, em especial sobre o conceito de função na perspectiva da covariação, ou seja, atrelado ao raciocínio covariacional.

4 Considerações finais

Diante dos resultados apresentados pela pesquisa e refletindo sobre a pergunta que a norteou - de que forma objetos de aprendizagem, no GeoGebra, possibilitam explorar o conceito de função na perspectiva da covariação?, podemos inferir que o ensino do conceito de função em um ambiente dinâmico e interativo, como no GeoGebra, vai além de simulação de situações-problema. Ele também possibilita a transformação concomitante de diferentes registros de representação semiótica, permitindo ao aluno, articular a visualização e a

experimentação em um mesmo ambiente, ou seja, na mesma janela de visualização, algo que no ambiente do lápis e do papel seria limitado. Dessa forma, o aluno utilizando esses objetos de aprendizagem do produto educacional construído na plataforma do GeoGebra, contaria com “uma ressignificação do conceito de função, visto que ampliam a abordagem usualmente presente em livros que tratam desse conceito, uma vez que, em geral, privilegiam em demasia a linguagem algébrica”. (Gonçalves et al., 2020, p. 17) e não abordando intencionalmente a perspectiva da covariação.

Dessa forma, ao utilizar esses objetos de aprendizagem do produto educacional construído na plataforma do GeoGebra, o aluno se beneficia de uma ressignificação do conceito de função. Isso amplia a abordagem usualmente presente em livros que tratam desse conceito, os quais, em geral, tendem a priorizar excessivamente a linguagem algébrica (Gonçalves et al., 2020, p. 17). Notavelmente, a abordagem do GeoGebra não apenas fornece uma alternativa dinâmica, mas também intencionalmente incorpora a perspectiva da covariação, enriquecendo a compreensão dos alunos sobre as relações matemáticas envolvidas.

Thompson e Carlson (2017), afirmam que o conceito de função na perspectiva da covariação pode ser compreendido como a variação dos valores de duas quantidades que ocorre simultaneamente. Essa compreensão exige do aluno um raciocínio chamado de raciocínio covariacional, isto é, a “capacidade de alguém pensar em uma imagem sustentada de valores de duas grandezas (magnitudes) simultaneamente” (Thompson; Carlson, 2017, p. 426, tradução nossa). Para que isso ocorra, é necessário proporcionar tarefas em contextos dinâmicos como as que apresentamos no produto educacional vinculado a esta pesquisa.

Outro fator importante para compreensão do conceito de função, que ocorre em tarefas de contextos dinâmicos, é a diversidade de registros semióticos de representação que os ambientes de aprendizagem com várias representações e simulações digitais possibilitam para facilitar o desenvolvimento conceitual dos estudantes. Pois “é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro” (Duval, 2012, p. 270). Essa diversidade de registros semióticos é oportunizada por atividades como a que apresentamos nesse artigo e outras que estão disponíveis no produto educacional produzido a partir desta pesquisa.

Por fim, acreditamos que o texto apresentado poderá colaborar ou até mesmo motivar professores de matemática a utilizarem o produto educacional em suas aulas para o ensino e aprendizagem do conceito de função na perspectiva da covariação, em especial para o despertar do raciocínio covariacional.

Agradecimentos:

Os autores agradecem a FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro aos Grupos de Pesquisa PEMSA e NEPESTEEM.

Referências

ÁVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio? Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 60, p. 30-38, 2006.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

CARLSON, Marilyn et al. Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. **Revista Ema**, v. 8, n. 2, p. 121-156, 2003.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond et al. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030!. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 10, n. 1, p. 1-23, 2015.

DUVAL, Raymond et al. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 01-78, 2017.

GONÇALVES, W. J., TREVISAN, A. L., Silva, D. D. L. da, & Ribeiro, A. J. (2020). Raciocínio covariacional em cálculo: desenvolvimento a partir de tarefas. **Zetetike**, 28, e020026

LIMA, JEFERSON MOIZÉS. **Covariação e o conceito de função: objetos dinâmicos**. Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias) – Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville, p. 42. 2019a.

LIMA, JEFERSON MOIZÉS. **Objetos dinâmicos de aprendizagem para exploração do conceito de função na perspectiva da covariação**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias) – Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville, p. 101. 2019b.

NÓBRIGA, Jorge Costa; SIPLE, Ivanete Zuchi. Livros Dinâmicos de Matemática Dynamic Mathematics Books. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020.

OEHRMAN, Michael; CARLSON, Marilyn; THOMPSON, Patrick W. Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. Making the connection: **Research and teaching in undergraduate mathematics education**, v. 27, p. 42, 2008.

SANTOS, Cláudia A. e INAFUCO, Julio. **Matemática: 1º ano**. Ensino Médio. Ed. Edebe, 2017.

THOMPSON, P. W., & CARLSON, M. P. (2017). **Variation, covariation, and functions**: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.