


## Tarefas envolvendo Geometria: análise de um livro de matemática indicado em Projetos Pedagógicos de Cursos de Matemática Licenciatura


Tasks involving Geometry: analysis of a mathematics book indicated in Pedagogical Projects of Mathematics Courses

Tareas de Geometría: análisis de un libro de matemáticas indicado en Proyectos Pedagógicos de los Cursos de Matemáticas


Dienifer da Luz Ferner<sup>1</sup>

 [0000-0002-4551-0763]

Maria Arlita da Silveira Soares<sup>2</sup>

 [0000-0001-5159-8653]

Rita de Cássia Pistóia Mariani<sup>3</sup>

 [0000-0002-8202-8351]

### Resumo

Este texto objetiva analisar o livro de matemática mais indicado nas bibliografias de componentes curriculares voltadas ao ensino e aprendizagem de cursos de Matemática Licenciatura do Brasil, quanto a Geometria Espacial (GE). Para tanto, recorreu-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica, em particular, a necessidade de mobilizar e coordenar registros figurais e da língua natural na atividade cognitiva exigida pela Geometria. Foram consideradas as transformações cognitivas e as apreensões de uma figura para analisar os conceitos/conteúdos, tipo de tarefas e recursos didáticos propostos no livro. Optou-se por uma abordagem qualitativa, de cunho documental, seguindo pressupostos da Análise de Conteúdo. Os resultados apontam que a coordenação de registros figurais e língua natural é considerada na apresentação dos conceitos/conteúdos de GE, principalmente, na demonstração de teoremas. Contudo, nas 104 atividades propostas o registro figural é exposto no enunciado de apenas 8 e na resolução de 42, o que representa menos de 50% do total de atividades. As atividades que apresentam registro figural requerem conversão de representações, com ênfase à conversão da língua natural para a numérica, tendo o registro figural como intermediário. Em 74% dessas atividades são exigidas articulações entre as apreensões, mas em função do tipo de tarefa sobressaem-se as apreensões discursiva e operatória. Não foram identificadas sugestões para uso de recursos didáticos (materiais manipuláveis e/ou digitais), o que pode limitar a aprendizagem em Geometria, visto que esses recursos auxiliam na mobilização e articulação das diferentes apreensões, proporcionando modificar a figura de forma rápida, bem como observá-la em diferentes posições.

**Palavras-chave:** Registros de Representação Semiótica. Representação figural. Apreensões.

### Abstract

This text aims to analyze the most suitable mathematics book in the bibliographies of curricular components aimed at teaching and learning Mathematics degree in Brazil, regarding Spatial Geometry

<sup>1</sup> [dieniferlferner@gmail.com](mailto:dieniferlferner@gmail.com), Mestra em Educação Matemática, Integrante do EMgpe - Educação Matemática: grupo de estudos e pesquisas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria/Rio Grande do Sul/Brasil.

<sup>2</sup> [arlitasoares@gmail.com](mailto:arlitasoares@gmail.com), Doutora em Educação nas Ciências, Professora Adjunta, Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul/Rio Grande do Sul/Brasil.

<sup>3</sup> [rcpmariani@yahoo.com.br](mailto:rcpmariani@yahoo.com.br), Doutora em Educação Matemática, Professora Associada, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria/RS/Brasil.

(GE). For that, the theory of Registers of Semiotic Representation was used, in particular, the need to mobilize and coordinate figurative and natural language registers in the cognitive activity required by Geometry. Cognitive transformations and apprehensions of a figure were considered to analyze the concepts/contents, type of tasks and didactic resources proposed in the book. We opted for a qualitative approach, of documentary nature, following the assumptions of Content Analysis. The results show that the coordination of figurative registers and natural language is considered in the presentation of the concepts/contents of GE, mainly in the demonstration of theorems. However, in the 104 proposed activities, the figural register is exposed in the statement of only 8 and in the resolution of 42, which represents less than 50% of the total activities. Activities that have a figural register require conversion of representations, with an emphasis on converting the natural language to the numerical one, with the figural register as an intermediary. In 74% of these activities, articulations between apprehensions are required, but depending on the type of task, discursive and operative apprehensions stand out. No suggestions were identified for the use of didactic resources (manipulable and/or digital materials), which can limit learning in Geometry, as these resources assist in the mobilization and articulation of different apprehensions, allowing quickly modify the figure, as well as observe it in different positions.

**Keywords:** Registers of Semiotic Representation. Figural representation. Apprehensions.

### Resumen

Este texto tiene como objetivo analizar el libro de matemáticas más adecuado en las bibliografías de componentes curriculares destinados a la enseñanza y el aprendizaje de cursos de Matemáticas en Brasil, con respecto a la Geometría Espacial (GE). Para ello, se utilizó la teoría de los registros de representación semiótica, en particular, la necesidad de movilizar y coordinar los registros de lenguaje figurado y natural en la actividad cognitiva requerida por la geometría. Se consideraron las transformaciones cognitivas y las aprehensiones de una figura para analizar los conceptos/contenidos, el tipo de tareas y los recursos didácticos propuestos en el libro. Optamos por un enfoque cualitativo y documental, siguiendo los supuestos del análisis de contenido. Los resultados muestran que la coordinación de los registros figurativos y el lenguaje natural se considera en la presentación de los conceptos/contenidos de GE, principalmente en la demostración de teoremas. Sin embargo, en las 104 actividades propuestas, el registro figurativo se expone en la declaración de solo 8 y en la resolución de 42, que representa menos del 50% de las actividades totales. Las actividades que tienen un registro figurativo requieren la conversión de representaciones, con énfasis en convertir el lenguaje natural al numérico, con el registro figurativo como intermediario. En el 74% de estas actividades, se requieren articulaciones entre aprehensiones, pero dependiendo del tipo de tarea, se destacan las aprehensiones discursivas y operativas. No se identificaron sugerencias para el uso de recursos de enseñanza (materiales manipulables y/o digitales), lo que puede limitar el aprendizaje en Geometría, ya que estos recursos ayudan en la movilización y articulación de diferentes aprehensiones, permitiendo modificar la figura rápidamente, así como observarlo en diferentes posiciones.

**Palabras claves:** Registros de representación semiótica. Representación figurativa. Aprehensiones.

## 1 Introdução

A Geometria ocupa um espaço importante na Educação Básica e no Ensino Superior, por consequência é necessário refletir sobre a formação de docentes neste campo. Essa relevância justifica-se pelo fato da Geometria ser “[...] um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível” (PAVANELLO, 2004, p. 4).

O debate sobre o ensino de Geometria na formação de professores requer a análise de diferentes aspectos, igualmente importantes, tanto no que tange ao conhecimento matemático quanto ao didático. Nesta perspectiva, os conceitos/conteúdos geométricos, precisam “[...] ser aprofundados nos seus aspectos epistemológicos e históricos e tratados de modo articulado com conteúdos mais complexos da Matemática e também com suas didáticas específicas” (SBEM, 2003, p. 6). Em outras palavras, há “necessidade de os futuros docentes desenvolverem um conhecimento compreensivo e aprofundado dos conceitos geométricos, e não meramente um conhecimento dos processos matemáticos em que se podem envolver os alunos com que irão trabalhar” (RODRIGUES; BRANCO, 2017, p. 139).

A realização de um trabalho articulado entre geometria experimental e axiomática na formação de professores é defendida por Pavanello e Andrade (2002). As pesquisadoras recomendam a organização de componentes curriculares que explorem conceitos/conteúdos geométricos numa perspectiva experimental e sejam discutidos recursos didático-metodológicos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. E, simultaneamente, sejam ofertados componentes direcionados a construção axiomática da Geometria, tendo por base discussões feitas nos componentes com viés experimental. “Configurar-se-ia, assim, uma construção nível a nível, a experimentação servindo de base a axiomatização e esta oferecendo subsídios para novas atividades [experimentais], num processo ‘em espiral’” (PAVANELLO; ANDRADE, 2002, p. 83).

O documento intitulado “A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM” corrobora com as ideias de Pavanello e Andrade (2002) e aponta aspectos a serem contemplados no trabalho com Geometria, a saber:

[...] o **desenvolvimento do raciocínio dedutivo e indutivo**, aprimorando habilidades de formulação e resolução de problemas geométricos, bem como tornando o aluno capaz de explicar o papel de cada postulado da Geometria, destacando a sua importância e suas consequências; **a percepção geométrica-espacial; a comparação entre a geometria euclidiana e outras geometrias**, [...]; **construções com régua e compasso**, enfatizando as construções gráficas e as suas justificativas, resolução de problemas que favoreçam o desenvolvimento das estratégias de resolução e a compreensão das propriedades geométricas, além de resultados de cálculo, bem como **utilizar programas computacionais de geometria dinâmica como apoio pedagógico**; e, a **aplicação dos conhecimentos geométricos em outras áreas do conhecimento**. (SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, p. 14, grifos nossos).

Além disso, é preciso considerar que a atividade cognitiva solicitada pela Geometria, conforme Duval (2004), é mais exigente do que a de outras áreas do conhecimento, porque requer que os tratamentos discursivos e figurais sejam realizados de forma simultânea e interativa. Em outros termos, requer a mobilização de registros figurais para designar figuras geométricas, suas propriedades e relações, e de registros da língua natural<sup>4</sup> para enunciar definições, teoremas e conjecturas.

A necessidade de mobilizar e coordenar registros figurais e da língua natural (de uso especializado) demanda a aprendizagem de operações específicas de cada um destes registros, constituindo assim, condições necessárias à aprendizagem de conceitos

<sup>4</sup> Considerando que na Geometria o registro da língua natural é utilizado para enunciar definições, teoremas e conjecturas, neste texto, utiliza-se a expressão “língua natural (de uso especializado)”.

geométricos (KLUPPEL; BRANDT, 2014). Nesta perspectiva, a capacidade de modificar e reorganizar um registro figural para visualizar a resolução de um problema pode ser desenvolvida e deve ser incentivada na formação do professor de Matemática (JAHN; BONGIOVANNI, 2019). A importância dada aos registros figurais, em particular, no ensino e aprendizagem de Geometria pode ser justificada, segundo Duval (2004), pelo fato de que eles fornecem uma representação do problema mais fácil de ser apreendida do que o registro da língua natural (de uso especializado). Para Jahn e Bongiovanni (2019, p. 245), os registros figurais “permitem perceber uma situação na sua globalidade e, conseqüentemente, podem constituir meios mais diretos de explorar diferentes aspectos [do problema], antecipar resultados ou selecionar uma estratégia de resolução”.

Entende-se que a discussão acerca da especificidade da atividade cognitiva exigida pela Geometria requer uma atenção especial em cursos de formação de professores de Matemática, em específico, nas escolhas das bibliografias que são apresentadas nas ementas dos componentes curriculares relacionados a esse campo. Isso porque tais bibliografias, em particular, livros textos e livros didáticos, escolhidas para compor as ementas de componentes curriculares podem fornecer uma aproximação das práticas realizadas em sala de aula, principalmente, no que tange ao conteúdo apresentado e às metodologias adotadas, possibilitando compreender o ensino proposto e suas (possíveis) conseqüências para a aprendizagem (BITTAR, 2017).

Considerando que o desenvolvimento e a coordenação das representações associadas aos registros figurais e língua natural (de uso especializado) precisam ser postos como objetivos do processo de ensino, bem como a influência dos livros textos e didáticos nesse processo, este texto tem por objetivo analisar o livro de matemática mais indicado nas bibliografias de componentes curriculares voltadas ao ensino e aprendizagem de cursos de matemática licenciatura do Brasil quanto às tarefas que envolvem Geometria Espacial (GE). Antes, porém, são apresentados pressupostos fundamentais para uma compreensão geral das ideias fundantes da teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), elaborada por Raymond Duval.

## 2 O registro figural na aprendizagem de Geometria

Ao tratar do processo de ensino e aprendizagem de Matemática é necessário mencionar que este campo do conhecimento é estudado, exclusivamente, por meio de representações semióticas, pois estas são a via exclusiva de acesso aos objetos matemáticos (DUVAL, 2011). Segundo Duval (2011, p. 149), “as produções dos alunos em matemática são produções semióticas”, apresentadas por meio de registros de representação semiótica<sup>5</sup>. Por isso, as dificuldades apresentadas na aprendizagem matemática não estão exclusivamente associadas aos conceitos/conteúdos abordados, mas também à pluralidade de representações semióticas empregadas, geralmente, para um mesmo objeto e ao uso “confuso” que fazem delas. Sendo assim, torna-se indispensável a abordagem de um mesmo objeto matemático por meio de diferentes representações semióticas.

A diversidade de representações semióticas e seus modos de funcionamento próprio são questões importantes, porém, o mais pertinente, matematicamente, em uma

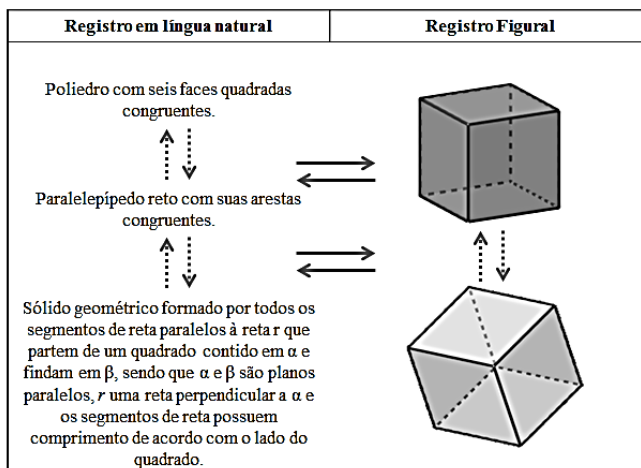
---

<sup>5</sup>Estes são “um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza, essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que permite efetuar” (DUVAL, 2011, p. 70).

representação semiótica são as possíveis transformações que podem ser realizadas. As duas transformações cognitivas da atividade matemática, são: a) Tratamento - quando a transformação gera outra representação semiótica no mesmo registro na qual foi formada, ou seja, é uma transformação interna ao registro; b) Conversão - quando a transformação gera uma representação semiótica que pertence a outro registro, isto é, uma transformação externa ao registro de partida. (DUVAL, 2011).

O exemplo exposto na Figura 1 apresenta para o mesmo objeto matemático, o cubo (em dois tipos de registros, língua natural e figural), transformações cognitivas, tratamento e conversão, que podem ser realizadas entre as representações semióticas destacadas de cada um dos registros. Nela os tratamentos sugeridos estão indicados por setas pontilhadas e as conversões apontadas por setas contínuas. Destaca-se que estas setas estão posicionadas em diferentes sentidos, pois, a título de exemplo, é possível partir de uma das descrições do cubo e ir para uma de suas representações figurais, assim como, visualizar a figura do cubo e descrevê-lo. Essa coordenação entre representações de diferentes registros é “a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos” (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 470).

Figura 1 – Transformações cognitivas de tratamento e conversão para representações de um cubo



Fonte: Organizado pelas autoras.

A aquisição do conhecimento matemático está condicionada a mobilização e coordenação de, ao menos dois, registros de representação semiótica. Neste sentido, a “conversão das representações é o primeiro limiar da compreensão em matemática” (DUVAL, 2011, p. 100). No entanto, não basta explorar atividades que envolvam a conversão de representações em apenas um sentido é necessário explorar também o sentido inverso. A conversão inversa em Geometria “[...] é necessária para que os estudantes entrem nas restrições do discurso matemático e favoreçam a articulação com o registro das figuras” (DUVAL, 2004, p. 182, tradução nossa).

Na teoria dos RRS a visualização é uma atividade baseada na produção de uma representação semiótica, em que essa “mostra relações, ou melhor, organização de relações entre unidades representativas” (DUVAL, 1999, p. 10, tradução nossa). O autor diferencia os termos “visão”, que proporciona apenas o acesso direto ao objeto, e “visualização”, o qual compreende a identificação de unidades figurais de representação, classificadas visualmente como dimensional e qualitativa. Para Duval (2004), outra operação fundamental é a

desconstrução dimensional de figuras geométricas que implica na mudança de dimensão ( $nD \rightarrow (n-1)D$ )<sup>6</sup>. A relevância dada a essa operação é justificada porque

[...] uma figura aparentemente reduzida a uma única unidade de dimensão 2 (um quadrado, por exemplo), só é uma figura, em matemática, à condição de que seja considerada como uma configuração de unidades figurais de dimensão 1 (os segmentos que formam os lados). Isso porque são as relações (paralelismo, simetria, tangência, ...) entre as unidades figurais elementares que constituem o conteúdo pertinente de uma figura geométrica. (DUVAL, 2004, p. 159, tradução nossa).

A mudança de dimensão está no interior do olhar geométrico, em outras palavras, na maneira de ver em Geometria. Conforme Duval (2014, p. 34), “para se tornar capaz de resolver, sozinho, problemas em geometria e de maneira prática, para reconhecer quando e como aplicar fórmulas para calcular grandezas (distância, área, etc.), é necessário se apropriar desta maneira de ver as figuras”. Para tal, os estudantes, além de construir figuras geométricas, devem aprender a desconstruí-las, mesmo que utilizem como recurso um programa computacional.

As figuras geométricas podem ter diferentes compreensões dependendo de cada sujeito, ou seja, interpretações autônomas que são classificadas por Duval (2012b) em quatro tipos de apreensões, a saber: perceptiva (P), discursiva (D), sequencial (S) e operatória (O). Sublinha-se que não há apenas a mobilização de uma apreensão para a resolução de uma atividade, geralmente, estas são mobilizadas de forma conjunta. A apreensão perceptiva refere-se à organização de elementos de uma figura. Ou seja, explora a interpretação das formas de uma representação geométrica impondo uma maneira comum de ver. A “organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a esconder outras” (DUVAL, 2004, p. 169, tradução nossa). No entanto, ocasionalmente, as unidades figurais reconhecidas não são as necessárias para a resolução da atividade proposta, sendo assim, as “figuras podem ter um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado” (DUVAL, 2012a, p. 136).

Para Duval (2004, p. 168, tradução nossa), a apreensão perceptiva subordina-se a apreensão discursiva, pois é “necessária uma indicação verbal para ancorar a figura como uma representação de tal objeto matemático”. Assim, “uma figura geométrica não se mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito” (DUVAL, 2012b, p. 133). Desta maneira, a apreensão discursiva está relacionada a articulação entre registro figural e língua natural. Esta apreensão “equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável” (DUVAL, 2012b, p. 135). Para Jahn e Bongiovanni (2019, p. 247), a apreensão discursiva permite explicitar propriedades matemáticas da figura, “além daquelas indicadas por uma legenda ou pelas hipóteses do enunciado. Essa explicitação é feita de maneira dedutiva, aplicando-se definições e propriedades conhecidas para deduzir outras e, assim, identificar outros elementos constitutivos da figura”.

A apreensão sequencial está relacionada à atividade de descrição ou construção com o objetivo de reproduzir uma figura. A construção de figuras de forma instrumental ou por meio de um *software* de Geometria Dinâmica (GD) proporciona a elaboração de observações, bem como verificações sobre suas propriedades. Conforme Jahn e Bongiovanni (2019, p. 247),

<sup>6</sup> Parte de uma dimensão para outra dimensão sucessiva menor, por exemplo, uma desconstrução dimensional do  $3D \rightarrow 2D$ .



esta apreensão “[...] permite melhor caracterizar os objetos geométricos numa dada situação, relacionando-os às propriedades [mobiliza a apreensão discursiva] utilizadas em sua construção”. Para os pesquisadores, um problema geométrico de construção vem acompanhado da articulação entre diferentes tipos de apreensões.

Na busca por solucionar alguns problemas em Geometria, podem ser feitas diferentes modificações e reorganizações nas figuras, entendidas como tratamentos figurais que constituem a apreensão operatória, cujas modificações são classificadas como óticas (OO), posicionais (OP) e mereológicas (OM) (DUVAL, 2012b). A modificação ótica refere-se a relação de tamanho da figura geométrica, ou seja, há uma transformação da figura em outra sem que nada mude em sua forma ou orientação no plano. A modificação posicional está diretamente vinculada às transformações de rotação e translação de um objeto matemático, pois corresponde a atividade de deslocar uma figura em relação a um referencial. A modificação mereológica, ou simplesmente, reconfiguração, esta relacionada à divisão e/ou organização de uma figura em outras de mesma dimensão ( $nD \rightarrow nD$ ). Duval (2005, p. 22, grifo do autor, tradução nossa) afirma que, as modificações mereológicas podem ser realizadas “*fisicamente* (cortando e remontando as peças obtidas como para um quebra-cabeça), *graficamente* (adicionando o que chamamos de linhas reorganizadoras acima da figura) ou mesmo *simplesmente olhando*”.

De acordo com Duval (2004, p. 165, tradução nossa) cada uma das modificações que podem ser realizadas por meio da mobilização da apreensão operatória “promovem operações específicas e constituem a produtividade heurística das figuras”. Para o autor, a decomposição mereológica é assumida como uma das operações fundamentais para se obter a compreensão matemática das figuras, ressaltando que “[...] quando as hipóteses incluem números como medidas de lados ou segmentos, a apreensão operatória é [na maioria das vezes] neutralizada e a figura cumpre apenas uma função ilustrativa ou de suporte” (DUVAL, 1999, p. 12, tradução nossa).

### 3 Encaminhamentos metodológicos

Este estudo se desenvolveu por meio de uma abordagem qualitativa, caracterizada pela realização de procedimentos mais intuitivos, maleáveis e adaptáveis ao contexto de análise (BARDIN, 2011). Como modalidade de pesquisa foi adotada a documental por ter como fonte de dados livros textos indicados nas bibliografias de componentes curriculares de Projetos Pedagógicos de Cursos (PPC) de Matemática Licenciatura. Quanto aos procedimentos mobilizados para as análises dos dados, a Análise de Conteúdo proporcionou o suporte necessário à sistematização das informações obtidas, pois esta técnica “possibilita realizar inferências, conhecidas não apenas por métodos estatísticos, de frequência, mas pela análise de mensagens provenientes de diferentes interlocutores, em um determinado contexto” (GOUVEIA; MISKULIN, 2018, p. 4).

Considerando os procedimentos da Análise de Conteúdo, foram percorridas três fases, a saber: pré-análise; exploração do material; tratamentos dos dados – inferência e interpretação. Na “pré-análise”, primeira etapa, momento de constituir o *corpus* da pesquisa - “conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 2011, p. 126) - o propósito foi o de selecionar bibliografias, relacionadas ao ensino e aprendizagem de conceitos/conteúdos de GE, mais citadas em cursos de Matemática Licenciatura do Brasil. Para tanto, primeiramente, foram identificados os PPC de cursos da área em questão ofertados na modalidade presencial em instituições brasileiras de

forma gratuita e em atividade no momento da pesquisa. Para isso, consultou-se o portal e-MEC<sup>7</sup> entre os dias 28 de junho e 09 de julho do ano de 2018. Neste portal, em cada uma das unidades federativas (estados e distrito federal) brasileiras, utilizou-se o recurso da “consulta interativa” buscando por cursos de Matemática Licenciatura em funcionamento de modo presencial e gratuito.

Constatou-se um total de 329 cursos destinados a formação de professores de Matemática em 127 instituições de Ensino Superior. Optou-se por prosseguir o estudo com cursos ofertados por instituições federais, pois estes representam, aproximadamente, 62,3% dos dados mapeados e estão distribuídos em todas as unidades federativas brasileiras. Na procura por obter as bibliografias dos componentes curriculares, realizou-se uma busca pelos PPC dos cursos selecionados através de seus *sites*. Por meio desta ação, localizou-se 113 PPC disponíveis, de forma *online*, dentre os 205 cursos federais identificados anteriormente. De posse dos PPC, inicialmente, buscou-se reconhecer os componentes curriculares relacionados à GE, tanto os específicos da Matemática, como os de ensino e aprendizagem. Para esta identificação, recorreu-se aos documentos que apresentam ementa/objetivos e bibliografia(s) para cada componente curricular oferecido no decorrer do curso. Por este motivo, a pesquisa prosseguiu com 95 PPC.

Para verificar quais são os componentes curriculares que abordam conceitos/conteúdos de GE, seja de forma específica e/ou destinados ao ensino e aprendizagem, explorou-se a ferramenta destinada à pesquisa de termos em programas leitores de arquivos. Com auxílio desta ferramenta, a pesquisa foi efetuada no nome do componente curricular, bem como em sua ementa e objetivos, utilizando dos descritores relacionados aos eixos/blocos de conteúdos associados ao campo da Geometria utilizados pelos PCN e BNCC, “grandezas e medidas” e “espaço e forma”, e, também, o descritor “geometri”, o qual se relaciona com os termos geometria e geométrico(s). A partir dessa busca, constataram-se 105 componentes curriculares referentes à GE<sup>8</sup> e 98 associados ao ensino e aprendizagem. Para identificar as obras relacionadas à GE, mais citadas em cursos de formação inicial de professores de Matemática, optou-se por verificar as bibliografias básicas e complementares desses 203 componentes, considerando o livro pelo título e autoria, independentemente do número de edição.

Entre os componentes específicos da área foram identificadas 266 obras distintas e, ao examinar as bibliografias citadas nos componentes de ensino e aprendizagem que fazem referência a conceitos/conteúdos de Geometria comum aos mapeados anteriormente obteve-se 50 obras<sup>9</sup>. Dentre as cinco mais indicadas foram observadas quatro que tratam esses assuntos sob uma perspectiva teórico-metodológica e apenas uma relacionada à organização do conhecimento matemático, ou seja, livros que são estruturados a partir de conceitos/conteúdos e de atividades da área da Matemática (Quadro 1).

<sup>7</sup> Portal organizado pelo ministério da Educação, no qual instituições de Ensino Superior realizam o credenciamento, buscam autorização, reconhecimento e renovação de reconhecimento de cursos.

<sup>8</sup> Dentre estes estão componentes curriculares específicos de Geometria Espacial, bem como de “Desenho Geométrico”, “Geometria Descritiva” e “Geometria Dinâmica”.

<sup>9</sup> Além destas, constavam revistas da área da Educação e Educação Matemática e alguns títulos relacionados a outros conceitos/conteúdos da Geometria, concomitantemente, estas obras foram desconsideradas.



Quadro 1 – Menções das obras nos componentes curriculares de ensino e aprendizagem mapeados

Obra	Bib.		Total
	Bás.	Comp.	
D'AMBROSIO, U. <b>Educação matemática</b> : da teoria à prática. 14ª ed. Campinas: Papirus, 2007.	3	6	9
LIMA, E. L. et al. <b>A Matemática do Ensino Médio</b> . Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.	5	5	10
LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (Orgs.). <b>Aprendendo e ensinando a geometria</b> . Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.	8	6	14
LORENZATO, S. <b>Para aprender matemática</b> . 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.	4	7	11
POLYA, G. <b>A arte de resolver problemas</b> : um novo enfoque do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.	8	6	14
RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. <b>Matemática</b> . 3ª ed. João Pessoa: EDUFP, 2004.	2	5	7

Fonte: Dados da pesquisa.

Optou-se por analisar a produção que possui características distintas da maioria, coleção Matemática do Ensino Médio, em particular, dois de seus volumes. O volume 2, em razão de apresentar capítulos como: “Ponto, reta e plano”; “Perpendicularismo”; “Poliedros”; e o volume 4, por expor, de forma mais detalhada, as soluções das atividades abordadas nos três volumes anteriores, incluindo o volume 2.

Assim, os critérios de análise estabelecidos emergiram das interpretações da teoria dos RRS e, também, da produção de dados provenientes deste estudo, são estes: a) conceitos/conteúdos de GE identificados nas obras; b) tipos de tarefas propostas; c) transformações cognitivas mobilizadas nas atividades analisadas; d) apreensões figurais mobilizadas nas atividades analisadas; e) indicações sobre o uso de recursos didáticos manipuláveis e digitais ao discutir conceitos/conteúdos de GE.

Destaca-se que, geralmente, ao ler textos sobre análise de livros questiona-se: como saber se essa é a transformação cognitiva e/ou apreensão que os autores gostariam que fosse utilizada? Para realizar tais inferências recorreu-se ao que estava no volume 4 e na forma como os conteúdos/conceitos foram apresentados no volume 2 (em específico nos capítulos relacionados a GE). Na análise dos materiais, busca-se elementos que possibilitem inferir sobre a forma como os autores da coleção desejam que os professores e/ou estudantes resolvam as atividades propostas. “Tal inferência apoia-se no conceito de Contrato Didático (Brousseau, 1986): o aluno busca, na ação do professor ou no livro didático, encontrar algum sinal do que é esperado que ele faça” (BITTAR, 2017, p. 373).

Concluída a “pré-análise”, a próxima seção apresenta as outras etapas da Análise de Conteúdo, “exploração do material”, na qual se investiga a obra selecionada com o propósito de produzir os dados para o estudo, bem como as “interpretações e tratamento dos resultados”, ambas organizadas a partir de quadros-resumo.

#### 4 Análise e discussão dos resultados

A obra selecionada foi organizada por Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, tendo sua primeira publicação em 1988, sendo destinada a professores do Ensino Médio e estudantes de Licenciatura em Matemática. Os autores, no volume 2 da obra, destacam no prefácio que a GE “envolve um esforço de imaginação bastante superior ao da Geometria Plana, principalmente devido às limitações causadas pela representação bidimensional das figuras” (LIMA et al., 2006, n.p.), tendo em

vista esse comentário, uma das preocupações postas na obra é a de propor atividades que facilitem o desenvolvimento da “visão”<sup>10</sup> e intuição espacial. Ressalta-se que, Duval (2011) chama atenção para a diferença entre os termos visão e visualização. A primeira refere-se apenas ao ato de ver e a segunda trata-se de um reconhecimento/identificação das características do objeto.

Essa obra, em seu volume 2, apresenta dois temas centrais: “Matemática Discreta” e “Introdução a Geometria Espacial”, distribuídos em 12 capítulos. São seis capítulos que apresentam conceitos/conteúdos de GE, organizados em 139 páginas que representam, aproximadamente, 46% do livro. O primeiro capítulo, “Ponto, Retas e Planos” (Cap. 7, distribuído em 27 páginas), aborda discussões iniciais sobre estes assuntos a partir de noções primitivas e alguns axiomas, para então explorar posições de reta em relação a outra reta e a um ou dois planos. A partir dessas ideias, é proposta a construção de alguns sólidos geométricos (pirâmides, cones, prismas e cilindros) para, após, discutir relações de paralelismo e proporcionalidade com base nas construções realizadas.

O capítulo seguinte, “Perpendicularismo” (Cap. 8, distribuído em 19 páginas), aborda o perpendicularismo entre: retas; reta e plano; planos, assim como, construções baseadas na perpendicularidade, por exemplo, prismas retos, pirâmides e octaedros regulares. No capítulo, ainda, é discutido sobre projeções ortogonais, simetria e reflexão. O terceiro capítulo, intitulado “Medindo Distâncias e Ângulos” (Cap. 9, distribuído em 24 páginas), aborda as relações métricas entre pontos, retas e planos, e apresenta, também, um item específico para esfera. Na sequência, é apresentado o capítulo “Poliedros” (Cap. 10, distribuído em 20 páginas), o qual propõe as primeiras relações a respeito do número de faces, arestas e vértices, para introduzir poliedros regulares, bem como o teorema de Euler. No penúltimo capítulo da obra, “Volumes e Áreas” (Cap. 11, distribuído em 24 páginas), são explorados os conceitos/conteúdos de GE, geralmente, mais enfatizados em livros didáticos da Educação Básica (FERNER; SOARES; MARIANI, 2019). Em outras palavras, apresenta, primeiramente, como calcular área e volume de um paralelepípedo retângulo, para então introduzir o princípio de Cavalieri. A partir dessa ideia, propõe como realizar os cálculos para prismas, pirâmides, cilindros, cones e esfera. O capítulo denominado “Superfícies e Sólidos de Revolução” (Cap. 12, distribuído em 25 páginas) é o último sobre conceitos/conteúdos de GE. Este versa sobre como se formam esses objetos, seus centros de gravidade, os teoremas de Pappus e por meio deste o cálculo da área e volume da esfera. Destaca-se que os sólidos de revolução abordados no Capítulo 12 não são os, geralmente, apresentados nos livros didáticos da Educação Básica (cilindro, cone e esfera).

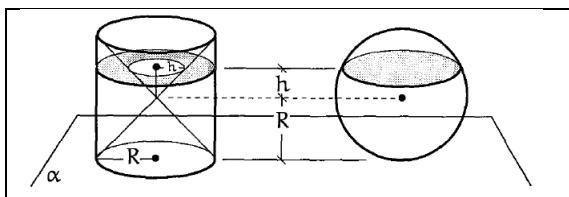
Concorda-se com Bittar (2017) que, a análise da forma como são apresentados os conceitos/conteúdos de GE possibilita identificar tipos de tarefas que são consideradas importantes pelos autores para aprendizagem desse campo da Matemática, mesmo que implicitamente, e é nessa parte que os estudantes e/ou professores buscam pistas para resolver o que lhes é pedido nas atividades. Ao analisar os seis capítulos dedicados a GE foi possível constatar que os tipos de tarefas exigiam a mobilização dos teoremas (apresentados e demonstrados) em atividades para identificar posições relativas de objetos; demonstrar teoremas; mostrar propriedades/relações; construir figuras geométricas; determinar grandezas (comprimento, área, volume); identificar sólidos semelhantes; entre outras.

<sup>10</sup> O entendimento sobre esse termo não está definido na obra.

Cada um dos seis capítulos descritos possui, ao final, um bloco de atividades. Ao total, são 104 atividades apresentadas, sendo que dez possuem registro figural em seu enunciado e 42 na resolução (elaborada pelos autores e publicada no volume 4). Cabe destacar que as atividades que possuem registro figural no enunciado estão distribuídas nos quatro primeiros capítulos. Assim, os capítulos intitulados “Volume e Áreas” (Cap. 11) e “Superfícies e Sólidos de Revolução” (Cap. 12) não apresentam esse tipo de registro em seu enunciado. Dentre as dez atividades identificadas com figura em seus enunciados, duas pertencem ao capítulo que versa sobre poliedros, no entanto, ambas se referem à teoria dos Grafos, a qual é utilizada para demonstrar o caso plano do teorema de Euler. Desta forma, por não abordarem diretamente conceitos/conteúdos da GE, estas não foram analisadas.

As 42 atividades que apresentam registro figural na resolução estão presentes em cinco dos seis capítulos. Apenas no Capítulo 10 (Poliedros) não foram identificadas atividades com registro figural na resolução. Contudo, na apresentação dos conceitos/conteúdos desse capítulo o registro figural foi utilizado em várias situações, em particular, na demonstração do teorema de Euler. Sublinha-se que os Capítulos 11 (Volume e Áreas) e 12 (Superfícies e Sólidos de Revolução) que não apresentam registro figural no enunciado das atividades propostas, também, utilizam desse registro em diversas situações para expor os conceitos/conteúdos, por exemplo, na demonstração do teorema relacionado ao volume da esfera (Figura 2). Neste caso, as operações (retiradas de cones e seções paralelas ao plano da base) realizadas nas figuras permitem evidenciar igualdades de áreas das seções determinadas em sólidos de mesma altura, garantindo, pelo Princípio de Cavalieri, volumes iguais.

Figura 2 – Registro Figural utilizado para demonstrar o teorema relacionado ao cálculo do volume da esfera



Fonte: LIMA et al., 2006a, p. 268.

Dada a importância do registro figural para a aprendizagem em Geometria, optou-se por analisar detalhadamente as atividades que apresentam esse registro em seu enunciado (oito atividades)<sup>11</sup> e na resolução (42 atividades). Primeiramente, buscou-se identificar qual tipo de tarefa é proposta aos estudantes. As atividades foram classificadas em sete tipos de tarefas, a saber: utilizar/determinar posições relativas; determinar grandezas; construir; categorizar objetos; determinar seção; mostrar; determinar o lugar geométrico. Após, foram identificadas as representações semióticas mobilizadas no enunciado (saída) e na resolução (chegada), o que permite analisar a atividade cognitiva (tratamento, conversão) exigida. Para apresentar os dados produzidos foi organizado o Quadro 2.

Os dados do Quadro 2 indicam que as atividades cujo registro figural faz parte do enunciado envolvem quatro tipos de tarefas dos sete identificados. Sendo as mais exploradas “determinar grandezas” (três atividades) e “construir” (três atividades), o que representa 75% do total das atividades com registro figural no enunciado. Já as atividades cujo registro figural faz parte da resolução abordam seis tipos de tarefas dos sete identificados. Os mais

<sup>11</sup> Destas oito, cinco possuem registro figural no enunciado e resolução, mas estão contabilizadas apenas como enunciado.

explorados são “determinar grandezas” (17 atividades) e “mostrar” (12 atividades). Também, constata-se que a maior variedade de tipos de tarefas foi identificada nos Capítulos 7 (seis tipos de tarefas) e 9 (cinco tipos de tarefas). Destaca-se que no Capítulo 11 foi identificado apenas um tipo de tarefa, a saber: “determinar grandezas”.

Quadro 2 – Síntese da análise referente às transformações cognitivas conforme o tipo de tarefa

Representação figural	Tipo de tarefa	Representações Semióticas mobilizadas		Capítulo	Nº da atividade
		Saída	Chegada		
No enunciado	Utilizar/determinar posições relativas	LN* e F	LF	7	1
	Determinar grandezas	LN* e F	SN	7	24
				8	17
				9	5
	Construir	LN* e F	F	8	12; 13; 14
Categorizar objetos	LN* e F	LF	9	6	
Na resolução	Utilizar/determinar posições relativas	LN*	LF	7	5
		LN*	SN	12	4
	Determinar grandezas	LN*	SN	7	26
				9	9; 10; 18; 19; 20; 21
				11	3; 9; 11; 13; 16; 17
				12	1; 2; 3; 6
	Construir	LN*	LF	7	8
		LN*	F	7	22
				12	7
	Determinar seção	LN*	LF	7	4; 16; 17
				9	14
	Mostrar	LN*	LF	7	11; 15
				8	3; 6; 11
				9	2; 8; 13
				12	5
		LN*	SA	7	14
				9	7; 12
Determinar o Lugar geométrico	LN*	LF	7	21; 23	
			8	4	
			9	17	

Legenda: F (figural); LF (linguagem formal); LN\* (língua natural de uso especializado); SA (simbólico algébrica); SN (simbólico numérica).

Fonte: Dados da pesquisa.

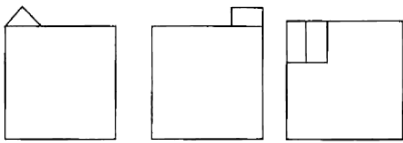

A análise restrita aos tipos de tarefas, nas atividades com registro figural, indica que há ênfase para “determinar grandezas”, ênfase essa relacionada a Geometria Métrica. É importante salientar que, a Geometria origina duas maneiras diferentes de se pensar, a primeira referente a questões associadas à posição relativa das formas (Geometria de Posições) e a segunda tratando de questões tocantes às medidas (Geometria Métrica) (BRASIL, 2002). As duas formas devem ser exploradas de modo articulado para que os estudantes possam investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. Contudo, ao analisar as transformações cognitivas e apreensões exigidas (Quadros 2 e 4), nas atividades com registro figural, verifica-se que aspectos da

Geometria de Posição precisam ser mobilizados para determinar as grandezas envolvidas, proporcionando a relação entre as duas formas de pensar.

Ainda, em relação aos dados do Quadro 2, constata-se que as 50 atividades analisadas requerem a transformação cognitiva de conversão. As oito atividades que apresentam registro figural no enunciado mobilizam a transformação cognitiva de conversão que parte da representação da língua natural (de uso especializado), juntamente, com a representação figural. As representações de chegada variam entre representação na língua formal, simbólica numérica e figural, respectivamente, duas, três e três atividades. As 42 atividades que apresentam registro figural na resolução requerem a transformação cognitiva de conversão que parte da representação da língua natural (de uso especializado) e tendo como representação de chegada linguagem formal (19 atividades), simbólica numérica (18 atividades), simbólica algébrica (3 atividades) e figural (2 atividades).

A atividade exposta no Quadro 3 é uma das oito que possuem figura no enunciado. No entanto, também tem esta representação em sua resolução. É solicitado o desenho de um sólido em que três de suas vistas (frontal, superior e de perfil) são apresentadas. Esta atividade foi classificada, quanto ao tipo de tarefa, como “construção”. Porém, não é exposta uma sucessão de passos ou denominado um sólido conhecido, sendo preciso, a partir das vistas (2D), buscar suas conexões/encaixes, isto é, verificar os contornos das figuras (segmentos de reta) para então identificar o sólido (3D) exigido. Em outras palavras, é necessário, desconstruir (discriminar todas as unidades visuais 2D, 1D e 0D) para construir o sólido originário das vistas.

Quadro 3 – Atividade 13 do Cap. 8 que mobiliza uma conversão

<p>13. Desenhe um sólido cujas vistas frontal, superior e de perfil sejam as dadas a seguir.</p> 	<p><i>Solução:</i></p> 
--	--

Fonte: LIMA et al., 2006b, p. 240,241,247.

A transformação cognitiva de tratamento não foi reconhecida nas atividades. Uma interpretação para este resultado está na atividade cognitiva solicitada pela Geometria, ou seja, realizar de forma simultânea e interativa tratamentos discursivos e figurais, exigindo conversão de representações. Quanto a conversão de representações, sublinha-se que os registros de chegada das atividades não variaram muito, em função dos tipos de tarefa exigidos e por este motivo as conversões, nos dois sentidos, não foram identificadas. Transformações estas importantes para que não se confunda o objeto matemático com sua representação.

O Quadro 4 expõe a categorização das atividades analisadas quanto às apreensões figurais. Antes de analisar os dados do quadro, ressalta-se que a apreensão P é considerada em todas as atividades, pois se faz necessário o reconhecimento de forma imediata de aspectos gerais do objeto no espaço que está ou será representado no plano. Além disso, nas atividades com registro figural na resolução, a apreensão S foi considerada em todas as atividades, porque para transitar do objeto tridimensional (designado no enunciado) para a representação plana é preciso reconhecer uma sequência de passos e regras de representação em perspectiva. Neste sentido, entende-se que “não são apenas em problemas de construção que a apreensão sequencial pode intervir. Os passos de uma construção geométrica podem

ser evocados em uma situação, servindo de base para outras apreensões da figura, em particular a discursiva” (JAHN; BONGIOVANNI, 2019, p. 248).

Quadro 4 – Síntese da análise referente às apreensões figurais conforme o tipo de tarefa

Representação figurial	Tipo de tarefa	Apreensões figurais mobilizadas	Capítulo	Nº da atividade
No enunciado	Utilizar/determinar posições relativas	P; D; OP	7	1
	Determinar grandezas	P; D	7	24
			8	17
			9	5
	Construir	S; P; OM; OP	8	12
8			13; 14	
Categorizar objetos	P; D; S; OM; OP	9	6	
Na resolução	Utilizar/determinar posições relativas	S; P; D	7	5
			12	4
	Determinar grandezas	S; P; D; OM; OP	7	26
			11	13; 16; 17
			9	9; 10; 18; 19; 20; 21
			11	3; 9; 11
			12	1; 2; 3; 6
	Construir	S; P; D	7	8; 22
			12	7
	Determinar seção	S; P; D; OM; OP	7	4; 16; 17
			9	14
	Mostrar	S; P; D; OM; OP	7	11; 14; 15
			8	6; 11
			9	2; 7; 8; 12; 13
			12	5
S; P; D		8	3	
Determinar o Lugar geométrico	S; P; D; OM; OP	7	21; 23	
		8	4	
		9	17	

Legenda: D(discursiva); OM(operatória mereológica); OP(operatória de posição); P(perceptiva); S(sequencial).

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar os dados do Quadro 4 percebe-se que 37 das 50 atividades (74% do total) requerem a articulação das apreensões S, P, D, OM e OP para a resolução. Das 37 atividades, 17 são identificadas no tipo de tarefa “determinar grandezas”; 11 em “mostrar”; quatro em “determinar seção”; quatro em “lugar geométrico”; e, uma em “caracterizar objetos”. Quanto as atividades que apresentam registro figurial no enunciado, apenas uma (Quadro 5) requer a articulação das apreensões S, P, D, OM e OP.

Destaca-se que a atividade 6 (Quadro 5) não apresenta, no volume 4, resolução. No enunciado dessa atividade há indícios das apreensões S e OM, pois são descritos os passos para construir o sólido, iniciando, pela modificação e reorganização do objeto. Identifica-se, no mínimo, duas dificuldades na resolução. A primeira refere-se a mudança de dimensão, ou seja, partir de uma figura plana para uma tridimensional (2D-3D). A segunda está no processo de “montar” o tetraedro, pois após remover o quarto superior a figura fica apenas com três faces triangulares. Este fato pode levar o estudante a não reconhecer o sólido, visto a falta de uma de suas faces, o que também pode prejudicar a identificação de suas propriedades particulares. Após organizar o tetraedro, guiada pela apreensão P, ele poderá ser visualizado



por diferentes ângulos, mobilizando assim a apreensão OP. Esta auxiliará a apreensão D para que se reconheçam as características do sólido. Sublinha-se que esta é a única atividade, dentre as analisadas, que apresenta indícios de uso de material manipulável no estudo de GE.

Quadro 5 – Atividade 6 do Cap. 9 que mobiliza as apreensões S, P, D, OM e OP

6. Um tetraedro pode ser construído a partir de um envelope da forma descrita abaixo.

a) Tome um envelope comum, feche-o e trace as diagonais do retângulo por ele determinado.

b) A seguir, corte o envelope como indicado, removendo seu quarto superior (b).

c) Agora, dobre o envelope, encaixando uma borda na outra. Pronto! Temos um tetraedro.

Que propriedades interessantes possui o tetraedro formado? Sob que condições ele é um tetraedro regular?



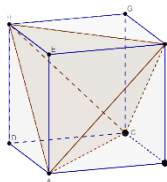
Fonte: LIMA et al., 2006b, p. 252.

Como já mencionado as atividades cujo tipo de tarefa é “determinar grandezas” são as mais exploradas e uma primeira análise poderia direcionar para ênfase na Geometria Métrica. Contudo, não basta, para a resolução dessas atividades, apenas a mobilização de fórmulas para cálculo, por exemplo, de área e volume de sólidos - o que envolveria a articulação das apreensões perceptiva e discursiva – é preciso identificar seções, lugares geométricos, semelhança – o que exige construir a figura (S), fazer nela modificações (OM e OP) que tragam novos dados para avançar em sua solução, e identificar aquelas mais pertinentes na resolução. Essas atividades exigem um movimento de construção (em geral, construir um sólido geométrico) e desconstrução dimensional (3D-2D-1D-0D).

O Quadro 6 ilustra uma das atividades cujo tipo de tarefa é “determinar grandezas”. Para resolvê-la é preciso analisar os planos que contêm as faces do cubo (desconstrução 3D-2D e OP); modificar as faces (OM), traçando suas diagonais; que possuem comprimento maior que o lado da face do cubo (D); e identificar que é possível inscrever no cubo um tetraedro cujas arestas são as diagonais das faces desse cubo. Sublinha-se que, conforme Rommenvaux (1999), ao resolver problemas de GE, os estudantes apresentam dificuldades em discernir os planos. Contudo, saber realizar essa distinção é decisivo para a aprendizagem de GE.

Quadro 6 – Atividade 3 do Cap. 11 que mobiliza as apreensões S, P, D, OM e OP

3. Determine o volume do maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo de aresta  $a$ .



Este é o maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo. Suas arestas são diagonais das faces do cubo. Seu volume é igual ao do cubo subtraído de quatro tetraedros tri-retângulos.

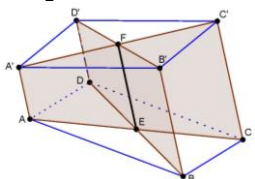
$$V = a^3 - 4 \left( \frac{a^3}{6} \right) = \frac{a^3}{3}$$

Fonte: LIMA et al., 2006, p. 274.

As atividades cujo tipo de tarefa é “mostrar” (todas com registro figural na resolução), em sua maioria (11 das 12 atividades), solicitam a articulação das apreensões S, P, D, OM e OP. Nessas atividades, após a construção do objeto (em geral, sólido geométrico), as apreensões que se sobrepõem são operatória e discursiva, pois a representação do objeto 3D no plano não evoca de forma imediata a(s) propriedade(s), sendo preciso modificar a figura de partida para recair em configurações e resultados conhecidos. Por exemplo, para resolver a atividade exposta no Quadro 7 é preciso, após a representação em perspectiva do objeto tridimensional, operar uma desconstrução dimensional das formas 2D reconhecidas imediatamente (quadriláteros – 2D) para 1D e OD (diagonais dos paralelogramos e pontos de

interseção), o que permitirá identificar os trapézios ( $AA'C'C$  e  $BB'D'D$ ) e o segmento  $EF$ , bem como mobilizar propriedades das diagonais dos paralelogramos e o teorema relacionado a base média dos trapézios.

Quadro 7 – Atividade 14 do Cap. 7 que mobiliza as apreensões S; P; D; OM; OP

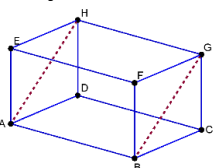
<p>14. Seja <math>ABCD</math> um paralelogramo. Pelos vértices <math>A, B, C</math> e <math>D</math> são traçadas retas não contidas no plano <math>ABCD</math> e paralelas entre si. Um plano <math>\alpha</math> corta estas retas em pontos <math>A', B', C'</math> e <math>D'</math>, situados no mesmo semi-espaco relativo ao plano de <math>ABCD</math>, de modo que <math>AA' = a, BB' = b, CC' = c</math> e <math>DD' = d</math>. Mostre que <math>a + c = b + d</math>.</p>	<p><b>Solução:</b> O ponto que une o ponto de encontro das diagonais de <math>ABCD</math> e <math>A'B'C'D'</math> é a base média dos trapézios <math>AA'C'C</math> e <math>BB'D'D</math>. Logo <math>\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}</math>.</p> 
---	---

Fonte: LIMA et al., 2006b, p. 227, 233.

Destaca-se que a apreensão operatória não foi considerada em uma atividade do tipo “mostrar” porque após instruções dadas no enunciado, para a construção do objeto, não é preciso fazer nenhum tratamento figural, em outros termos, a(s) propriedade(s) fica(m) evidente(s). Ainda em relação as atividades cujo tipo de tarefa é “mostrar”, percebe-se que o êxito na resolução depende da articulação entre a apreensão operatória da figura e do “jogo discursivo das inferências, o qual mobiliza uma rede de definições e teoremas” (DUVAL, 2004, p. 170, tradução nossa), exigindo o uso da linguagem formal.

Todas as atividades cujo tipo de tarefa é “determinar seção” (ilustração de uma atividade no Quadro 8) requerem a articulação das apreensões S, P, D, OM e OP. Na resolução dessas atividades prevalecem as apreensões OM, OP e D. As modificações (OM e OP) são realizadas, principalmente, para identificar a posição dos planos (horizontais, verticais, inclinados), retas e pontos que podem ser construídos a partir dos dados do enunciado. A apreensão D destaca-se por ser preciso mobilizar alguns axiomas (dois pontos determinam uma reta; três pontos não colineares determinam um plano; uma reta e um ponto fora dela determinam um plano; retas paralelas determinam um plano) e algumas propriedades (uma reta com dois pontos comuns em um plano está contida nesse plano; um plano secante a dois planos paralelos entre si, intersecta-os segundo retas paralelas).

Quadro 8 – Atividade 4 do Cap. 7 que mobiliza as apreensões S; P; D; OM; OP

<p>4. Qual a seção determinada em um paralelepípedo <math>ABCDEFGH</math> pelo plano <math>ABG</math>?</p>	<p><b>Solução:</b></p>  <p>O plano determinado por <math>AB</math> e <math>G</math> contém a reta passando por <math>G</math> e paralela a <math>AB</math>; portanto, ele contém a aresta <math>GH</math>, oposta a <math>AB</math>. Logo, a seção é o paralelogramo determinado por estas duas retas.</p>
--	---

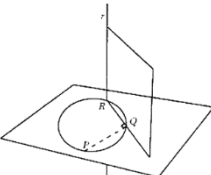
Fonte: LIMA et al., 2006b, p. 226, 229,230.

Entende-se que o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica pode contribuir na resolução de atividades cuja tarefa é “determinar seções”, pois a manipulação dinâmica permite realizar movimentos de rotação (OP), proporcionando diferentes pontos de vista para o objeto 3D. Além disso, podem ser realizadas modificações na figura (OM), de forma rápida, por meio da inserção de pontos, retas e planos. “A geometria dinâmica trouxe novas

possibilidades para o ensino e a aprendizagem das técnicas de representação” (BONGIOVANNI, 2016, p. 288).

Assim como seções de sólidos, lugar geométrico é um assunto que os *softwares* de GD podem contribuir, pois a ferramenta *lugar geométrico* possibilita expor de forma instantânea “[...] a trajetória de um ponto enquanto outro ponto percorre uma curva. A geometria dinâmica permite criar lugares geométricos como verdadeiros objetos geométricos e obter as intersecções de lugares geométricos com outras curvas” (BONGIOVANNI, 2016, p. 272). Como já mencionado, nas atividades analisadas, foram identificadas quatro cuja tarefa é “determinar lugar geométrico”. Elas necessitam, também, para sua resolução, a articulação entre as apreensões S, P, D, OM e OP. A atividade 4 (Quadro 9) ilustra este tipo de tarefa, em que, para resolvê-la, é preciso transformar o enunciado numa figura - que destaque a reta  $r$  e o ponto  $P$  - por meio da apreensão S guiada pela P. Modificações na figura (OM) e movimentos de rotação (OP) são necessários para identificar que os pés das perpendiculares traçadas de  $P$  aos planos que contém  $r$  determinam um círculo, bem como mobilizar a apreensão D para justificar o lugar geométrico visualizado. Se for utilizado um *software* de GD para auxiliar na resolução, ele apresentará, de modo instantâneo, o lugar geométrico. A apreensão P indicará que a curva é um círculo, mas só a apreensão D fornece elementos para justificar que a curva percebida é de fato um círculo.

Quadro 9 – Atividade 4 do Cap. 8 que mobiliza as apreensões S; P; D; OM; OP

<p>4. Seja <math>r</math> uma reta do espaço e <math>P</math> um ponto exterior a <math>r</math>. Qual é o lugar geométrico (LG) dos pés das perpendiculares traçadas de <math>P</math> aos planos que contém <math>r</math>?</p>	<p><i>Solução:</i></p>  <p>As retas perpendiculares a <math>r</math> estão no plano perpendicular a <math>r</math> passando por <math>P</math>. Os pés destas perpendiculares são exatamente os pontos <math>Q</math> tais que o ângulo <math>PQR</math> é reto, onde <math>R</math> é a projeção ortogonal de <math>P</math> sobre <math>r</math>. Logo, o LG é um círculo de diâmetro <math>PR</math>.</p>
---	---

Fonte: LIMA et al., 2006b, p. 240, 244.

Em relação as atividades classificadas como “construção”, destaca-se que prevalecem as apreensões OM e OP nas situações cujo registro figural está no enunciado e há primazia da apreensão D nas atividades cujo registro figural está na resolução, pois é preciso mobilizar propriedades para garantir a construção. É importante registrar que não foram identificadas atividades que solicitassem a construção de um sólido a partir de suas propriedades/características, mesmo os conceitos/conteúdos dos capítulos relacionados a GE sendo expostos dessa forma. Quanto às atividades do tipo de tarefa “determinar posições relativas”, constatou-se que a maioria das atividades que não apresentam registro figural (54 atividades) exploram esse tipo de tarefa e são resolvidas por meio do registro simbólico com ênfase na linguagem de conjuntos. Na resolução das atividades desse tipo, que apresentam registro figural, a apreensão D é a que prevalece.

Diante desses resultados, pode-se constatar que as atividades requerem a articulação entre as várias apreensões, contudo, as atividades devem incentivar a mobilização da apreensão operatória, em seus diferentes casos, pois a apreensão discursiva, associada à dedução, e a apreensão sequencial, associada à construção, são insuficientes para que os estudantes tenham bom desempenho na resolução de problemas geométricos (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

## 5 Ponderações finais

O ensino de Geometria voltado para formação docente requer a análise de diferentes aspectos tanto em relação ao conhecimento matemático quanto ao didático. Um dos desafios para os cursos de licenciatura é proporcionar situações que requerem articulação entre a Geometria experimental e a axiomática, bem como a análise da especificidade exigida pela atividade cognitiva, envolvendo tratamentos discursivos e figurais, simultaneamente. E, entendendo que o livro adotado em componentes curriculares da área de ensino e aprendizagem e de componentes específicos de Geometria pode ser tomado como um suporte para a organização didático-pedagógica além de referência de estudo julga-se relevante investigá-lo.

Nesse sentido, analisou-se o livro de matemática mais indicado nos componentes curriculares de ensino e aprendizagem de cursos de Matemática Licenciatura. Por meio do exame dos volumes 2 e 4 da obra constatou-se que, dentre as 104 atividades analisadas, nos capítulos de GE, apenas oito apresentam registro figural no enunciado e 42 possuem este registro na resolução. Sendo assim, são apenas estas que proporcionam algum tipo de apreensão figural e podem mobilizar uma desconstrução dimensional da figura. Este dado não abrange nem 50% das questões analisadas e contraria a perspectiva de Duval (2005), o qual sinaliza que o entendimento em Geometria está relacionado às operações puramente figurais e articulação com o registro da língua natural. Desta forma, entende-se a necessidade de apresentação de mais atividades com figuras em seus enunciados.

Quanto às transformações cognitivas, as atividades que apresentam registro figural requerem conversão de representações. Diferentes tipos de registros são mobilizados, no entanto, a conversão da língua natural para a numérica, tendo o registro figural como intermediário obtêm maior destaque. Em 74% das atividades analisadas são exigidas articulações entre as apreensões figurais que evidenciam diferentes maneiras de ver em Geometria. Em função do tipo de tarefa sobressaem-se as apreensões discursiva e operatória, as quais contribuem para um bom desempenho dos estudantes em questões relacionadas a conceitos geométricos, pois estão associadas à dedução e raciocínio, no entanto deixam de lado situações relacionadas a construção.

Em relação ao tipo de tarefa observou-se que o maior número de atividades está relacionado a “determinar grandezas”, o que poderia levar a inferir que a obra dá ênfase, apenas, a geometria métrica. No entanto, ao analisar as atividades sob a ótica da teoria dos RRS constatou-se que a resolução não demanda apenas a utilização de uma fórmula, requerendo a conversão de representações e a mobilização e articulação de diferentes apreensões relacionadas a conceitos da geometria de posição.

Por fim, vale destacar que não foram identificadas sugestões de uso de recursos didáticos (materiais manipuláveis e/ou digitais), tanto para a compreensão dos conceitos/conteúdos como para a resolução e compreensão das atividades analisadas, o que pode limitar a aprendizagem em Geometria, visto que esses recursos auxiliam na mobilização e articulação das diferentes apreensões.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Referências

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas-SP, v. 25, n. 3, p. 364-387, 2017.

BONGIOVANNI, Vincenzo. A inserção da Geometria Dinâmica no Ensino da Geometria: um olhar didático. **HISTEMAT**, v. 2, n. 2, p. 264-297 2016. Disponível em <<http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/90>>. Acessado em fev. de 2020.

BONINI, Adair; DRUCK, Iole de Freitas; BARRA, Eduardo Salles de Oliveira. **Direitos à aprendizagem e ao desenvolvimento na educação básica: subsídios ao currículo nacional**. Curitiba-PR, 2018. Disponível em <<https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/55911>> Acesso em mar. 2020.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio** - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012a. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382>>. Acesso em: mar. 2020.

\_\_\_\_\_. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 10, p. 5 - 53. IREM de Strasbourg, 2005.

\_\_\_\_\_. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 07, n. 2, 2012b. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>>. Acesso em: mar. 2020.

\_\_\_\_\_. **Representation, Vision and Visualization**: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic issues for learning, 1999.

\_\_\_\_\_. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels: Santiago de Calai, Colômbia: 2004.

\_\_\_\_\_. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

\_\_\_\_\_. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, p. 15-38, 2014.

FERNER, Dienifer da Luz; SOARES, Maria Arlita da Silveira; MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Geometria Espacial de Posição: análise de duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio. **Boletim Gepem**, v.1, n. 74, p. 56-71, 2019. Disponível em <<http://costalima.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/265/607>>. Acessado em mar. de 2020.

GOUVEIA, Carolina Augusta Assumpção; MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. Aspectos metodológicos de uma pesquisa de doutorado: uma busca pela manifestação da prática docente. In:

V Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos - V SIPEQ, 2018, Foz do Iguaçu - PR. **Anais...**, São Paulo SP: Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos, 2018. p. 01-12.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**. v. 22, n. 2, p.465-487, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320160020012>>. Acesso em: abr. 2020.

JAHN, Ana Paula; BONGIOVANNI, Vincenzo. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. v. 12, n. 3, p. 245-257, 2019. Disponível em: <<https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/7584>>. Acesso em mar. 2020.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. In BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu (Org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, p. 113-134, 2014.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de Matemática. vol. 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006a.

\_\_\_\_\_. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de Matemática. vol. 4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006b.

PAVANELLO, Maria Regina; ANDRADE, Roseli Nozaki Grave de. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 9, n. 11, p. 78-87, 2002.

PAVANELLO, Maria Regina. Por que Ensinar/aprender Geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. **Anais...** Disponível em <[http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais\\_VII\\_EPDM/mesas\\_redondas/mr21-Regina.doc](http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPDM/mesas_redondas/mr21-Regina.doc)> Acesso em: mar. de 2020.

RODRIGUES, Margarida; BRANCO, Neusa. Formação de professores em ensino da geometria. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática. **Anais...**, Lisboa, Portugal, 2017. Disponível em <[http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_2017.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2017.pdf)>. Acessado em abr. de 2020

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-SBEM. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura**: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim SBEM, n. 21, fevereiro, p. 1-42, 2013.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-SBEM. **Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática**: Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2003. Documento produzido pelo I Seminário Nacional "Construindo propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática", Salvador, 2003.