ISSN 2357-724X DOI: http://dx.doi.org/10.5965/2357724X112023e0007

Artigo

A construção histórica do conceito de integral e os Três Mundos da Matemática

The historical construction of the integral concept and the three worlds of mathematics

La construcción histórica del concepto de integral y los tres mundos de las matemáticas

Rafael Winícius da Silva Bueno[1]
[0000-0002-9573-8053]
Lori Viali[2]
[0000-0001-9944-3845]

Resumo[3]
O presente trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica, realizada com o objetivo de buscar compreender, com base na teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, como ocorreu a evolução histórica do Cálculo Diferencial e Integral, com atenção especial ao conceito de integral. Para tanto, inicialmente, foi feito um estudo sobre os mundos Conceitual Corporificado, Operacional Simbólico e Formal Axiomático para, então, percorrer um caminho matemático traçado pela humanidade, iniciado na Grécia Antiga, com Arquimedes de Siracusa, indo até o século XX. Analisando-se as informações encontradas, percebeu-se que o ensino de Cálculo traça, normalmente, uma rota oposta ao desenvolvimento histórico desse campo, sendo introduzido a partir da ideia de limite, um já-encontrado presente no mundo dos matemáticos e professores de Cálculo Diferencial e Integral, mas que não pertence aos mundos da Geometria, da Aritmética e da Álgebra, habitados pelos acadêmicos que ingressam em cursos de Ciências Exatas no Ensino Superior.

Palavras-chave: História da Matemática. Conceito de integral. Três Mundos da Matemática.

Abstract
This work presents a bibliographic research, carried out with the objective of seeking to understand, based on the theory of the Three Worlds of Mathematics, created by David Tall, how the historical evolution of Calculus occurred, with special attention to the concept of integral. To achieve this goal, a study was initially carried out on the Conceptual Embodied, Operational Symbolic and Axiomatic Formal worlds, to follow, then, a mathematical path that started in Ancient Greece, with Archimedes, from Syracuse, and went until the 20th century. Analyzing the information found, it was noticed that the teaching of Calculus usually traces a route opposite to the history development of this field, being introduced from the limit idea, a met-before present on the mathematics and on the professors' worlds, but that does not belong to the worlds of geometry, arithmetic and algebra, inhabited by academics entering on university.

[1] **rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br**, Doutor em Educação em Ciências e Matemática, Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, São Vicente do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil.

[2] **viali@pucrs.br,** Doutor em Engenharia de Produção, Professor Titular, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil.

[3] **Nota dos editores:** este artigo mostrou similaridade (47%) com a tese de doutorado de um dos autores, disponível em: https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/10144/4/Tese%20V%20Final%2004%202022.pdf.

Keywords: Mathematics History. Integral concept. The Three Worlds of Mathematics.

Resumen

El presente trabajo presenta una investigación documental o bibliográfica, llevada a cabo con el objetivo de tratar de comprender, con base en la teoría de los Tres Mundos de las Matemáticas, propuesta por David Tall, cómo ocurrió la evolución histórica del Cálculo Diferencial y Integral, con especial atención al concepto de integral. Con este fin, inicialmente se realizó un estudio sobre los mundos Conceptual Corporificado, Operativo Simbólico y Axiomático Formal, y sequió un camino matemático trazado por la humanidad, que empezó en la Grecia, con Arquímedes de Siracusa, y continuó hasta el siglo XX. Al analizar la información encontrada, se observó que la enseñanza del Cálculo generalmente traza una ruta opuesta al desarrollo histórico de este campo, introduciéndose a partir de la idea de limite, un ya-encontrado presente en el mundo de los matemáticos e maestros de Cálculo, pero que no pertenece a los mundos de la geometría, la aritmética y el álgebra, que están habitados por académicos que ingresan a cursos de ciencias exactos en la Educación Superior.

Palabras claves: Historia de las Matemáticas. Concepto de integral. Tres Mundos de las Matemáticas.

1 Introdução

Buscando por pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, é possível deparar-se com trabalhos que retratam o contexto tido como tradicional em aulas de Matemática. Segundo D'Ambrósio (1997), costuma-se tratar os alunos como um conjunto homogêneo, tendo como resultado, excluindo-se as felizes exceções, discentes tolhidos no desenvolvimento do seu potencial criativo e intelectual. Essa situação termina trazendo consequências para as disciplinas de Cálculo, consideradas árduas pelos estudantes e com um índice de reprovação significativo (Frant, 2016).

Percebe-se que o Ensino Superior ainda tende a centrar-se em uma prática mecânica e algébrica do Cálculo. De acordo com Backendorf e Basso (2018), em muitos casos, os discentes acabam realizando processos rápidos, guiados por algoritmos repetitivos, que levam a soluções, mesmo que os estudantes não tenham construído compreensão do que foi feito. Destaca-se, então, a necessidade de uma reflexão importante, pois, apesar de a matemática universitária ser uma extensão da escolar, em que predominam técnicas de utilização de métodos numéricos e algébricos, ela requer uma sofisticação gradual.

Acredita-se que é relevante compreender como se dá a evolução do conhecimento matemático, a fim de encontrar alternativas para a realidade predominante nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo. Nesse sentido, destaca-se a construção dos Três Mundos da Matemática, feita por David Tall, que resultou em uma teoria voltada para o ensino e a aprendizagem de Matemática e que pode, inclusive, ser aplicada no estudo do seu desenvolvimento histórico. A partir dessas concepções, entende-se que é importante analisar como se deu a construção histórica do Cálculo, particularmente do conceito de integral, sob o prisma da teoria dos Três Mundos da Matemática.

Para tal, realizou-se a presente investigação, de caráter qualitativo, entendida como um estudo bibliográfico. A pesquisa desenvolveu-se a partir de análises históricas e revisão de estudos, tendo livros e artigos científicos como material de trabalho.

2 Os Três Mundos da Matemática

No seu trabalho sobre a evolução do pensamento matemático, Tall (2013) propôs a teoria dos Três Mundos da Matemática, na qual distingue três formas diferentes de conhecimento dessa ciência: a inicial envolve o estudo de objetos e suas propriedades; a segunda começa com a Aritmética e evolui até a Álgebra e seu simbolismo cada vez mais sofisticado; já a terceira origina-se com o estudo acadêmico da matemática pura e formal. Essa construção teórica estabelecida pelo autor é fundamentada, respectivamente, nos mundos Conceitual Corporificado, Operacional Simbólico e Formal Axiomático.

O Mundo Conceitual Corporificado é desenvolvido a partir das percepções e ações que acontecem no mundo real e se desenrolam até a criação de imagens mentais cada vez mais sofisticadas (Tall, 2004). A ideia de corporificação refere-se à observação, descrição, ação e reflexão sobre experiências que envolvem inicialmente objetos físicos, mas que evoluem até a construção de experiências mentais.

O Mundo Operacional Simbólico é caracterizado pelos símbolos utilizados em Aritmética, Álgebra e no Cálculo, por exemplo. Começa com ações que se desenvolvem até se tornarem processos matemáticos que podem ser trocados por conceitos sobre os quais se debruçam os pensamentos.

Já no Mundo Formal Axiomático, o conhecimento é construído a partir de axiomas e definições, que originam teoremas e corolários, entre outros. Suas propriedades são deduzidas estritamente por demonstrações matemáticas, não sendo utilizados apenas objetos sensoriais, mas experiências mentais abstratas que geram axiomas formulados para criar estruturas matemáticas cada vez mais sofisticadas (Tall, 2004).

Cada um desses mundos cresce em complexidade à medida que o estudo evolui, de forma que cada aluno traça o próprio caminho no seu desenvolvimento matemático. Durante essa jornada, são encontrados problemas que requerem ideias anteriores (escolares ou não) para serem transpostos, e cada indivíduo os trata de maneira diferente, o que leva a uma incontável variedade de desenvolvimentos pessoais (Tall, 2013).

Essas concepções prévias são denominadas de já-encontrados e são definidas por Tall (2013) como estruturas cognitivas resultantes de experiências anteriores. São determinadas, em parte, por conceitos matemáticos, o que contribui para a formação de já-encontrados semelhantes entre as pessoas; por outro lado, variam com a percepção individual que se tem sobre esses conceitos, o que leva a diferenças consideráveis entre os seres humanos.

Como Tall, Lima e Healy (2014) argumentam, um já-encontrado é considerado uma influência positiva quando ascende sobre um novo contexto, permitindo que ideias vistas anteriormente sejam utilizadas no desenvolvimento de sofisticações matemáticas. Ainda de acordo com os autores, a influência de um já-encontrado é percebida como negativa quando impede ou dificulta a construção de uma possível generalização.

3 A Construção Histórica do Conceito de Integral

3.1 Arquimedes

Arquimedes de Siracusa (c. 280 a. C.) estudou em Alexandria, onde aprendeu as bases da Matemática. Entre os seus trabalhos vinculados à gênese do Cálculo, destacam-se aqueles referentes ao cálculo de áreas, nos quais utilizava a dupla redução ao absurdo. Nesse sentido, supunha que uma das grandezas era maior ou menor que a outra e, a seguir, supunha o contrário, e chegava a dois absurdos, o que demonstrava que uma grandeza, não podendo ser nem menor, nem maior que a outra, só poderia ser igual a ela. Nesse contexto, Arquimedes usava uma modificação do método da exaustão, proposto por Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), considerando uma figura inscrita e outra circunscrita.

Percebendo, porém, que uma ideia prévia do resultado era importante para aplicar essa técnica, Arquimedes costumava empregar o conceito físico de equilíbrio de pesos suspensos sobre alavancas, em conjunção com a ideia de que uma superfície, por exemplo, era composta por muitas linhas. Para encontrar uma área ou um volume, o pensador realizava, de acordo com Eves (2004), experiências mentais, nas quais dividia uma região em um número muito grande de faixas planas, que eram penduradas, na sua imaginação, em uma extremidade de uma barra, de tal forma que pudesse estabelecer o equilíbrio com algo conhecido. Essas experiências levavam Arquimedes a uma resposta para suas questões, mas, não se satisfazendo com esses processos, recorria ao método da exaustão a fim de ter uma demonstração que pensava ser mais rigorosa.

Nesse contexto, Boyer (1959) destaca que o método de Arquimedes pode ser entendido como uma antecipação da ideia de infinitesimais, estabelecida no século XVII. Com o conceito de limite estabelecido, cerca de dois mil anos depois, é possível confundir o método de Arquimedes com a concepção de integração (Eves, 2004).

3.2 A Idade Média

O trabalho de Arquimedes envolvendo os infinitesimais permaneceu mais um milênio e meio adormecido. Nesse período, os matemáticos preferiram os métodos geométricos, tidos como mais experimentados. Dessa forma, evoluções importantes no desenvolvimento do Cálculo começaram a ocorrer novamente só no século XIV, nas universidades de Oxford e Paris, onde surgiram os primeiros estudos sobre variações (Boyer, 1996).

Nesse período, houve a introdução da ideia de *impetus*, atribuída ao filósofo francês Jean Buridan (1300-1358) e traduzida na percepção de que um corpo, uma vez em movimento, se não existir a ação de forças externas, tem a tendência de continuar esse movimento. Essa nova teoria tornou mais aceitável a ideia de velocidade instantânea, presente nos estudos de variação do século XIV. Começaram a surgir, ainda de forma mais metafísica que matemática, inúmeras referências sobre taxa de variação instantânea, mesmo que nenhuma definição precisa tenha sido construída. Essas obras e ideias referiam-se à variabilidade de qualidades, empregadas no contexto da latitude das formas (Boyer, 1996).

O estudo da latitude das formas foi cultivado, principalmente, pelo pensador francês Nicole Oresme (1323-1382), que desenvolveu suas ideias a partir de uma abordagem geométrica. As formas, ou qualidades, eram os fenômenos como a luz, ou a velocidade, que têm vários níveis de intensidade e mudam continuamente. Boyer (1996, p. 181) afirma que “os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com a nossa geometria analítica”.

Apesar dos avanços consideráveis trazidos pela latitude das formas, os princípios fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo continuaram sendo alicerçados fundamentalmente na Geometria. Assim, considera-se que a Idade Média trouxe poucas contribuições à Geometria ou à Álgebra, uma vez que suas discussões se concentraram em especulações metafísicas sobre concepções relativas ao movimento e à variabilidade.

3.3 O Período Pré-Cálculo

No século XVI, um dos grandes avanços foi o desenvolvimento da Álgebra, proveniente dos hindus e dos árabes. Entretanto, o estabelecimento de símbolos como quantidades abstratas coube ao matemático francês François Viète (1540-1603), que utilizou vogais para denotar quantidades desconhecidas e consoantes para identificar as constantes. Youschkevitch (1976, p. 51) argumenta que:

> A importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (uma palavra também originada de Viète), dificilmente pode ser estimada.

O simbolismo inovador foi fundamental para o avanço, nos séculos seguintes, da Geometria Analítica e, consequentemente, do Cálculo. Esse novos estudos permitiram, entre outras questões relevantes, que ideias relativas à variabilidade e às funções fossem inseridas no pensamento algébrico, melhorando a notação e conduzindo a métodos de aplicação mais simples que aqueles utilizados geometricamente por Arquimedes.

3.3.1 Johan Kepler

Johan Kepler (1571-1630) trabalhou como professor de Matemática na Áustria, de 1594 até 1598. Em 1600, foi convidado pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) para ser seu assistente em Praga e, com a morte de Brahe, herdou a sua posição de astrônomo da corte do imperador da Bohemia, além de sua vasta coleção de dados.

De posse das observações de Brahe, Kepler pôde complementar seu estudo sobre o movimento dos planetas em torno do sol; em 1609, formulou as duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos depois, a terceira. Para calcular as áreas varridas pelos planetas na sua segunda lei, Kepler recorreu a uma forma rudimentar de Cálculo Integral. Segundo Boyer (1996, p. 222), "Kepler pensava na área formada de uma infinidade de pequenos triângulos com um vértice no sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita".

Kepler não utilizou o rigor clássico de Arquimedes, referente ao método da exaustão, optando por recorrer a uma abordagem mais sugestiva. Esse também foi o procedimento adotado em seu tratado sobre barris de vinho, de 1615, em que calculou o volume de mais de noventa sólidos. Ele iniciou seu trabalho determinando a área do círculo, que foi considerado como um polígono regular com um número infinito de lados, de modo que sua área fosse composta por triângulos infinitesimais que tinham um de seus vértices no centro da circunferência e cujas bases eram os lados desse polígono. Como as alturas dos triângulos eram iguais ao raio (r) do círculo e a soma das suas bases correspondia ao comprimento da circunferência (C), Kepler concluiu que a área A é dada por $A = rC/2$.

3.3.2 Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri

Em 1635, o italiano Cavalieri (1598-1647) publicou *Geometria indivisibilibus*. Nesse trabalho, Cavalieri apresenta o seu método dos indivisíveis, que tem relação com os trabalhos de Arquimedes e que, apesar das negativas do italiano, pode ter sido inspirado no método de Kepler. Essa conexão talvez tenha ocorrido de forma indireta, uma vez que os dois pensadores mantinham correspondência com Galileu Galilei (1564 -1642).

A visão de Galileu sobre os indivisíveis apareceu nas suas obras *Dois Principais Sistemas*, de 1632, e, principalmente, em *As Duas Novas Ciências*. Nesta última, Galileu utilizou um gráfico para a velocidade, considerando a área abaixo de uma curva velocidade x tempo como a distância percorrida (Boyer, 1959).

Galileu também propôs a lei dos corpos em queda, que foi a primeira descrição matemática do movimento na ciência moderna, o que traçou uma tendência para a Física. Embora as ideias fundamentais dessa lei se baseassem em relações geométricas euclidianas, Galileu inclinou-se a assumir que uma reta é composta por infinitos pontos, o que respondeu a uma pergunta enviada a Galileu por Cavalieri em 1621 e encorajou o jovem matemático a persistir em seus estudos sobre os indivisíveis (Alexander, 2016).

A técnica de Cavalieri baseava-se na decomposição de figuras em indivisíveis, argumentando que um plano é feito de linhas, assim como uma roupa é feita de fios, e que um sólido é feito de planos, da mesma forma que um livro é composto por páginas. De acordo com Alexander (2016), na visão de Cavalieri, a área de uma figura era dada pela soma de uma infinidade de retas paralelas, da mesma forma que o volume de um sólido era dado pela soma de uma infinidade de áreas paralelas.

O que fica evidente, segundo Alexander (2016), é que, diferentemente das provas euclidianas, o raciocínio de Cavalieri começou com uma intuição corpórea do mundo real e, só então, prosseguiu para generalizações matemáticas mais abstratas. Apesar de Cavalieri ter explorado um conceito que já havia sido trabalhado na Grécia Antiga, sua abordagem foi inovadora, permitindo o cálculo de áreas e volumes que dificilmente seriam alcançados pelos métodos elementares. Dessa forma, Cavalieri chegou, por exemplo, a resultados que, em termos atuais, podem ser expressos por:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Arquimedes, conforme destaca Boyer (1959), conhecia a verdade dessa afirmação para $n = 1$ e $n = 2$. Os árabes, por sua vez, tinham provado a sua veracidade para $n = 4$. Porém, foi Cavalieri, baseado em diferentes conceitos, que generalizou essa afirmação para todos os valores inteiros e positivos de n.

A falta de uma definição do conceito de indivisível e de uma explicação de como a soma de elementos sem dimensão poderia levar à composição de uma área ou volume levou ao surgimento de sérias críticas ao trabalho de Cavalieri. Para combater esses ataques, Cavalieri sustentou que superfícies e volumes podem ser gerados pelo fluxo de indivisíveis, o que não foi desenvolvido satisfatoriamente para o seu método geométrico (Alexander, 2016).

3.3.3 Evangelista Torricelli

A evolução do método de Cavalieri coube ao italiano Evangelista Torricelli. Em 1641, quando o mentor de Torricelli, o matemático italiano Benedetto Castelli (1578-1643), visitou Galileu, levou consigo um manuscrito do jovem aprendiz que impressionou o anfitrião. Ambos elaboraram, então, um plano que culminou com a ida de Torricelli de Roma para Florença, a fim de servir como secretário de Galileu.

Em janeiro de 1642, três meses depois da chegada de Torricelli, Galileu faleceu. Após esse episódio, Torricelli permaneceu em Florença, ocupando os cargos de grão-duque da Toscana e de professor de Matemática na Universidade de Pisa (Alexander, 2016).

Os anos seguintes foram frutíferos para Torricelli. Publicado em 1644, o livro *Opera Geometrica*[4] trouxe o ensaio *De dimensione parabolae*[5], que, ao contrário do que sugere o título, não demonstrou o cálculo da área interna de uma parábola, mas trouxe 21 provas diferentes desse resultado, que havia sido calculado por Arquimedes 1.800 anos antes, provando que a área de uma parábola é 4/3 da área de um triângulo com a mesma base e altura. Onze dessas demonstrações de Torricelli utilizavam-se do método da exaustão, e as dez finais fizeram uso da nova geometria dos indivisíveis, com o propósito de mostrar a superioridade dessa ideia inovadora.

O trabalho de Torricelli sobre tangentes também marcou uma evolução da visão clássica, pois caminhou em direção à introdução da noção de velocidade instantânea. Ele considerou que as curvas eram geradas por um ponto que se move com velocidade variável, empregando essa ideia para determinar tangentes de parábolas e também de outras curvas presentes nos trabalhos de Arquimedes.

A ideia de representações cinemáticas pode ter sido antecipada pelos matemáticos franceses Giles Persone Roberval (1602-1675) e René Descartes (1596-1650). Esse suposto fato gerou uma forte reação de Roberval, que chegou a acusar Torricelli de plágio.

3.3.4 Giles Persone Roberval

Roberval foi um importante pensador francês que ocupou a cadeira de Matemática do Collège Royal da França, de 1634 até o dia de sua morte. Esse cargo era disputado a cada três anos, com base em exames competitivos, cujas questões eram propostas pelo detentor da cátedra. Roberval, que havia desenvolvido um método dos indivisíveis semelhante ao de Cavalieri, conseguiu conservar a posição até o fim da sua vida.

Roberval construiu um método para traçar tangentes em qualquer ponto de uma curva (questão também resolvida, no mesmo período, por Fermat e Descartes) e pôde encontrar o volume do sólido de revolução gerado por essa curva. Para tanto, considerava, de forma dinâmica, a geração da curva a partir de um ponto em movimento.

Sem dúvida, Roberval havia se familiarizado com o trabalho matemático de Cavalieri. Entretanto, o francês não afirmava que uma superfície era composta por linhas nem que os sólidos eram compostos por superfícies. Declarava, em sutil oposição, que a expressão “infinito número de pontos” era utilizada para expressar uma infinidade de pequenas linhas que compunham a linha como um todo, e que a expressão “infinito número de linhas” representava a infinidade de superfícies que formavam a superfície (Boyer, 1959).

Com o desenvolvimento do seu método, Roberval provou, de acordo com Boyer (1996), o que, em notação atual, é dado por:

$$\int_a^b sen\,(x)\,dx = \cos(b) - \cos\,(a)$$

Todavia, Roberval não publicou todas as suas descobertas, tendo-as reservado para suplantar os candidatos ao seu posto no Collège Royal. Por essa razão, algumas de suas conquistas foram reivindicadas posteriormente por outros matemáticos.

[4] Trabalho Geométrico.
[5] Da dimensão da parábola.

3.3.5 Blaise Pascal

Um dos prodígios da França do século XVII, Blaise Pascal (1623-1662) começou a despontar aos 12 anos, quando (re)inventou muitas das ideias trazidas nos *Elementos*. Estudando sozinho, aos 16 anos publicou a obra *Essay pour les Coniques*[6].

Por ordens de seu pai, Pascal continuava estudando assuntos alheios à Matemática, podendo dedicar-se a ela apenas nas suas horas vagas. Seu entusiasmo, contudo, não foi refreado e, aos 19 anos, construiu uma das primeiras máquinas de calcular da história.

Boyer (1996) destaca, entretanto, que os interesses de Pascal costumavam variar bastante. Assim, o francês voltou a dar atenção à Matemática só em 1654, quando redigiu a sua *Obra Completa sobre as Cônicas*, dedicou-se à continuação do seu *Essay* e deu início, em correspondências com Pierre de Fermat (1607-1665), à Teoria das Probabilidades.

Após um novo período longe da Matemática, Pascal voltou-se, a partir de 1658, para estudos com infinitesimais. Foi tão longe ao comparar os indivisíveis da Geometria com o zero da Aritmética, que tal ideia só foi completamente concebida e compreendida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) décadas mais tarde.

A concepção de Pascal sobre as quantidades negligenciadas pode ser caracterizada como o princípio básico do Cálculo. Nessa ideia, a área abaixo de uma curva era concebida, de acordo com Roque (2012), como a soma de um número indefinido de retângulos infinitamente finos, diferindo da área original por uma quantidade que poderia ser tornada menor que qualquer outra quantidade dada.

3.3.6 Pierre de Fermat

O pacato Pierre de Fermat, jurista por formação e sem qualquer estudo oficial em Ciências Exatas, foi um dos protagonistas da Matemática do século XVII. Ocupando o cargo de magistrado na cidade de Toulouse, na França, auferia bons rendimentos e ainda tinha tempo para dedicar-se a outras atividades, como a Matemática (Garbi, 2010). Empregando, então, boa parte da sua energia no estudo dessa ciência, Fermat configurou-se, de acordo com Singh (1999), em um verdadeiro estudioso, sendo chamado, inclusive, de Príncipe dos Amadores.

Com Pascal, um dos poucos matemáticos com quem se comunicava, Fermat construiu as primeiras ideias sobre a Teoria das Probabilidades. Nesse sentido, Singh (1999, p. 60) afirma que "Fermat era um gênio retraído, que sacrificava a fama de modo a não ser distraído por picuinhas com seus críticos".

O matemático amador também estudou formas de associar equações algébricas indeterminadas (casos em que o x, por exemplo, assume o papel de variável) a linhas geométricas, levando ao que se conhece atualmente como Geometria Analítica. Essa descoberta, porém, só foi divulgada postumamente, em 1679.

Armado com as novas ferramentas criadas por meio da Geometria Analítica, Fermat resolveu atacar o problema das tangentes e encontrar máximos e mínimos de uma curva. Nesse contexto, para achar o máximo ou o mínimo de uma curva polinomial $y = f(x)$, Fermat comparou o valor de $f(x)$, em um ponto específico, com o valor de $f(x + E)$, em um ponto vizinho, ambos próximos de um vale ou de um ápice da curva.

Para achar os pontos de máximo ou de mínimo, igualava $f(x)$ a $f(x + E)$, de forma que, quanto menor o intervalo E entre os dois pontos, mais perto chegava da verdadeira equação.

[6] Ensaio sobre as cônicas.

Depois de dividir tudo por E, Fermat fazia $E = 0$, e os resultados davam-lhe os valores das abscissas nos pontos de máximo ou de mínimo da função polinomial. A essência desse processo está na diferenciação e equivale a achar o limite seguinte e, então, igualar a zero.

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

De acordo com Boyer (1959), o procedimento de Fermat é muito semelhante ao utilizado no Cálculo Diferencial atual. A contribuição de Fermat foi tão importante para a evolução da Matemática, que Newton chegou a escrever, certa vez, que desenvolveu suas ideias inspirado no método do "*Monsieur* Fermat" para estabelecer tangentes (Singh, 1999).

No entanto, Boyer (1959) argumenta que o raciocínio utilizado por Fermat era menos transparente que o usado na modernidade. A Análise contemporânea recorre ao conceito de limite para tratar de Δx quando essa variação se aproxima de zero, enquanto Fermat parece não ter recorrido a esse conceito e, de fato, interpretou que E realmente chegava a zero.

3.3.7 René Descartes

Um dos maiores críticos do trabalho de Fermat foi o seu compatriota René Descartes. Ao concluir sua formação básica, em 1614, o jovem Descartes iniciou seus estudos em Direito na Universidade de Poitiers. Nessa época, entretanto, sua atenção já estava voltada para outras áreas do conhecimento, como a Filosofia e a Matemática.

Em consonância com os ideais filosóficos em voga na época, Descartes acreditava que o desenvolvimento técnico melhoraria a vida dos seres humanos. Defendia, ainda, que o pensamento dos homens deveria voltar-se exclusivamente para o que fosse passível de ser quantificado, sendo que as deduções deveriam ser baseadas por relações entre entes quantificáveis, traduzidos em equações matemáticas (Roque, 2012).

Em 1628, Descartes deparou-se com um problema que, aparentemente, ainda não havia sido resolvido. Aplicando alguns de seus novos métodos, resolveu a questão sem maiores dificuldades. Ao perceber a força das suas criações, resolveu escrever *La Géométrie*, que, publicada como um apêndice de *Le Discours de la Méthode*[7], foi a obra responsável por levar a Geometria Analítica ao conhecimento público (Boyer, 1996).

Nesse trabalho, declarou que resolver problemas geométricos tinha uma dimensão algébrica, que levava à resolução de equações simbólicas. Afirmou que uma curva poderia ser representada analiticamente por meio do *locus* de um ponto, que tinha suas distâncias (x e y), relativas a duas linhas retas fixas, definidas e relacionadas. Descartes mostrou, então, que essa relação poderia ser representada por uma equação envolvendo x e y e outros possíveis dados do problema (constantes) e, reciprocamente, que qualquer dessas equações expressava as propriedades geométricas da sua curva.

A disputa de Descartes com Fermat fez o primeiro interessar-se pelo problema das tangentes, mas os métodos de Descartes eram puramente algébricos, sem o envolvimento de qualquer ideia de limite ou infinitesimal. Assim, se tivesse pensado em variáveis contínuas e não apenas em correspondência entre símbolos, talvez Descartes pudesse ter interpretado as tangentes em termos de limites (Boyer, 1959).

[7] O Discurso sobre o Método.

3.3.8 John Wallis

Na França do século XVII, somente Fermat e Descartes fizeram uso substancial dos seus novos métodos. Já na Inglaterra, o matemático John Wallis (1616-1703) apoiou-se na Geometria Analítica para resolver problemas relacionados à quadratura.

Em 1656, Wallis, então professor de Oxford, publicou sua obra prima *Aritmetica Infinitorum*[8], que, apesar de fazer uso das inovações de Descartes, tratava de um assunto obscuro para o francês: o cálculo da área de uma região limitada por uma curva e o cálculo do volume de um sólido limitado por superfícies curvas.

Utilizando as ideias de Descartes e Cavalieri, Wallis transcendeu a visão de ambos ao usar as séries infinitas nos seus estudos. Ao abandonar o cenário geométrico, associando valores numéricos aos infinitos indivisíveis das figuras e pela primeira vez utilizando o símbolo ∞, o inglês chegou, de forma menos trabalhosa que Cavalieri, a resultados (para todos os valores inteiros de *m*) como o que atualmente é dado por:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

O tratamento dado por Wallis para os infinitamente pequenos foi bem mais audacioso que aquele utilizado por Fermat. Segundo informa Boyer (1959), enquanto o francês não chamou seu símbolo *E* de infinitesimal, Wallis afirmou que 1/∞ representava uma quantidade infinitamente pequena. Utilizando esse recurso, o matemático inglês encontrou resultados importantes, como a fórmula geral para o cálculo da área de um triângulo, por exemplo.

Fermat criticou parte do trabalho de Wallis, sugerindo falta de rigor nas suas demonstrações. A isso, de acordo com Alexander (2016), o matemático inglês respondeu argumentando que sua Matemática se fundamentava nas ideias de Cavalieri e que os questionamentos do francês estavam respondidos nos livros do italiano.

3.3.9 Isaac Barrow

O londrino Isaac Barrow (1630-1677) foi o primeiro a ocupar a Cátedra Lucasiana de Matemática, na Universidade de Cambridge. Considerado um matemático conservador, Barrow não apreciava formalismos algébricos, o que o diferenciava de Wallis, e preferia utilizar a visão cinemática de Torricelli em relação à Aritmética.

Barrow aproximou-se muito de encontrar uma demonstração geométrica para o Teorema Fundamental do Cálculo. No entanto, em função da sua rejeição à Álgebra, não percebeu o significado dos resultados encontrados por meio da sua análise geométrica.

Boyer (1959) argumenta que, apesar da falta de apreciação pelos métodos analíticos e da incapacidade de aceitar a importância da aritmetização de Wallis, os resultados geométricos alcançados por Barrow significaram uma aproximação em direção ao Cálculo. Entre esses resultados, estão inúmeros teoremas sobre quadraturas e tangentes e o reconhecimento mais lúcido, até então, sobre a relação entre esses dois tipos de problemas.

Barrow pensava em termos geométricos e infinitesimais, preterindo a ideia de funções e símbolos. Seu método, pois, era similar ao de Fermat, sendo que, enquanto o francês utilizava unicamente a letra E, o inglês fazia uso de duas letras, a e e (futuros Δy e Δx), aproximando-se do processo de diferenciação atual.

[8] Aritmética do Infinito.

3.4 Isaac Newton

Isaac Newton, um jovem interiorano britânico, de Wollsthorpe, ingressou na Universidade de Cambridge em 1661, aos 18 anos de idade. Nessa época, seu interesse estava voltado, basicamente, para a Química. A partir de 1663, contudo, quando começou a entrar em contato com obras clássicas da Matemática e a frequentar as aulas de Barrow, Newton dirigiu sua atenção para incursões matemáticas.

Nas suas intensas leituras, familiarizou-se com as séries infinitas, que lhe forneceram meios para encontrar soluções numéricas para o cálculo de áreas. No livro de Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, deparou-se com os passos iniciais para a criação do Cálculo, encontrando inspiração para desenvolver um método mais abrangente.

O período no qual a produção científica de Newton alcançou o seu auge foi aquele em que esteve longe de Cambridge. Entre 1665 e 1667, a universidade fechou suas portas, em virtude de uma epidemia que assolou a Inglaterra. Nesse tempo, Newton voltou para Wollsthorpe e lá escreveu manuscritos com conceitos fundamentais e inovadores.

Pensando cineticamente em curvas geradas pelo movimento de um ponto (ou mais), criou métodos gerais para encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva, em qualquer ponto específico, e para quadrar linhas curvas que pudessem ser quadradas. Pensou na tangente, então, como a reta na qual a curva se tornaria se pudesse ser analisada por um microscópio altamente poderoso (Gleick, 2004).

Pensando no movimento como o cerne do estudo das curvas, Newton desenvolveu a teoria das *fluxões*. Utilizava os conceitos de *fluente* e *fluxões*, afirmando que as *fluentes* eram as quantidades que fluíam (atuais variáveis), enquanto as *fluxões* eram as velocidades com que essas quantidades fluíam. Newton definia a derivada como a velocidade de fluência e, para representar a *fluxão* de uma *fluente* y, por exemplo, criou a notação $\dot{y}$, que, em linguagem moderna, equivale a dy/dt, com t representando o tempo.

Para encontrar distâncias (*fluentes*) a partir das velocidades (relação *fluxional*), por exemplo, Newton resolvia aquilo que atualmente é denominado de equação diferencial, invertendo o procedimento utilizado para encontrar a *fluxão.* Assim, notou que o problema de encontrar *fluentes* a partir das *fluxões* era equivalente ao de determinar a área sob uma curva. Portanto, Newton descobriu e passou a utilizar em suas pesquisas o que atualmente é denominado de Teorema Fundamental do Cálculo (Bonfim; Calábria, 2017).

Todavia, tanto o Cálculo quanto outras descobertas feitas por Newton nesse período de retiro permaneceram desconhecidos por cerca de meio século, pois o cientista não aceitava bem as críticas, muitas vezes infundadas, à sua obra. Acredita-se que, até 1669, somente Barrow conhecesse o trabalho matemático de Newton (Bardi, 2008).

Nesse ano (1669), porém, um dos seus artigos, intitulado *De analysi per aequationes numero terminorum infintas*[9], que tratava das séries infinitas e suas aplicações para cálculo da área, foi enviado por Barrow a seu amigo John Collins[10] (1625-1683), em Londres. A partir de então, Newton deixou de ser uma figura anônima.

Boyer (1959) destaca que, em *De analysi*, o britânico empregou a ideia de momentos de área e encontrou um método geral para a quadratura. Além disso, de forma inversa, argumentava que, se a base AB de uma curva AD for perpendicular à ordenada BD, e ainda,

---

[9] Da análise por meio de equações tendo um número infinito de termos.
[10] Um empresário que incentivava o estudo da Matemática no século XVII.

se AB for chamado de x e BD de y, com a, b, c … sendo quantidades dadas e m e n inteiros, então, se $y = ax^{m/n}$, a área de ABD será:

$$\acute{A}rea = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Mesmo tendo realizado essas descobertas, Newton recusou-se a publicar o seu trabalho, e *De analysi* permaneceu inédito até 1711.

3.5 Gottfried Wilhelm Leibniz

O alemão Gottfried Leibniz ingressou na Universidade de Leipzig aos 14 anos e completou seus estudos com 20 anos de idade, período em que se concentrou em aprender sobre leis e filosofia. Ao receber negativa da instituição ao seu pedido para lá permanecer como professor, submeteu sua tese, em outubro de 1666, à Universidade de Altdorf, onde, cinco meses depois, concluiu seu doutorado.

Declinando um convite para permanecer em um posto acadêmico em Altdorf, Leibniz passou a dedicar sua vida a servir duas famílias da nobreza alemã. De acordo com Bardi (2008), o jovem advogado começou a trabalhar, em 1667, como secretário, assistente e bibliotecário do Barão Johan Christian von Boineburg (1622-1672).

Cinco anos depois, em meio a uma disputa que deixou a Europa à beira de uma guerra, Boineburg enviou Leibniz para Paris, em uma missão que buscava dar ao Barão acesso às suas terras na França e a uma pensão (Bardi, 2008). Foi em Paris que o jovem gênio começou a desenvolver seu conhecimento matemático. Esse processo iniciou-se quando percebeu, a partir de interações com matemáticos europeus, como o holandês Christian Huygens (1629-1695), a fragilidade das suas percepções dessa ciência. Assim, o inspirado Leibniz começou a estudar com um entusiasmo destemido.

Leibniz chegou, então, em 1675, às mesmas conclusões a que o seu colega inglês havia chegado anos antes. Depois de algumas tentativas iniciais, o alemão definiu dx e dy como as menores possíveis diferenças em x e y e criou o sinal de integral, com um "s" alongado, advindo da palavra soma (*shumma* em latim).

Todas essas conclusões sobre o trabalho de Leibniz foram construídas a partir dos seus manuscritos, pois a sua primeira publicação oficial sobre o Cálculo só ocorreu em 1684, quando já havia assumido a posição de bibliotecário do Duque Johan Friedrich (1625-679), em Hannover. O título da obra, que se concentrava no Cálculo Diferencial, era *Nova methodus pro maximis et minimis*[11].

Dois anos depois, Leibniz publicou um novo texto, dando ênfase ao Cálculo Integral. Mostrou que a quadratura se caracterizava como o método inverso ao utilizado para encontrar tangentes, o que o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo (Boyer, 1996). A ideia central da abordagem trazida por Leibniz para o Cálculo distinguia-se da de Newton, uma vez que não se fundamentava na noção de taxa de variação, mas na conceituação de diferenciais (Bonfim; Calabria, 2017).

Leibniz percebia a integral como a soma de retângulos infinitamente pequenos, cada um com área ydx, de forma que denotava a área sob a curva $y(x)$ por $\int ydx$. O matemático alemão não indicava os limites de integração, pois os considerava como sendo, sempre, a origem e a última abscissa x.

[11] Um novo método para máximos e mínimos.

3.6 Dúvidas pairam no ar

Apesar de reconhecer o poder da diferenciação e da integração, pensadores da época levantaram questões sobre a fundamentação dessa área. Muitas dessas dúvidas só foram findadas quando Cauchy (1789-1857) trouxe sua aplicação mais rigorosa do conceito de limite.

Em *The Analyst*[12], obra publicada após a morte de Newton, o irlandês George Berkeley (1685-1753) afirmou que, quanto mais se analisavam as ideias de Newton, mais se ficava perdido em devaneios, pois os objetos acabavam simplesmente desaparecendo. Colocando nuvens também sobre o pensamento de Leibniz, Berkeley afirmou que conceber uma quantidade que é infinitamente menor que qualquer coisa e, ainda, manipulá-la algebricamente era uma dificuldade infinita para qualquer um. Daí considerar "os seguidores de Newton e Leibniz culpados de usarem métodos que não entendiam" (Edwards, 1979, p. 293).

Com essa conjuntura de reticências emergentes, criou-se na Inglaterra a percepção de uma possível falta de clareza nos argumentos de Newton, o que levou a uma confusão sobre o seu método. No continente, o pensamento de Leibniz ganhava popularidade mais rapidamente. Assim, catalisado principalmente pelo entusiasmo dos irmãos Bernoulli, o Cálculo evoluiu mais depressa na Europa continental do que na Grã-Bretanha (Boyer, 1959).

3.7 Os irmãos Bernoulli

A família Bernoulli estabeleceu-se na Suíça em 1583. Um dos seus membros, Nicolau (1623-1708), que se dedicou ao comércio de especiarias, acabou por tornar-se vereador da cidade onde residiam. Foi Nicolau, então, que fundou uma notável linhagem de expoentes das Ciências Exatas.

Jacques Bernoulli (1654-1705), quinto filho de Nicolau, foi o primeiro matemático profissional da família. Apesar de ter morado a vida toda na Suíça, Jacques viajou muito e encontrou grandes cientistas da sua época, tornando-se amigo de alguns deles, como Leibniz.

O grande interesse de Jacques pelo Cálculo, incentivado por sua relação de amizade com Leibniz, permitiu-lhe dominar as técnicas e os novos métodos desse campo. Nesse contexto, sugeriu ao alemão, em 1680, o emprego da palavra "integral" para o problema da quadratura e, em seus próprios trabalhos com séries infinitas, demonstrou, por exemplo, que a série harmônica diverge (Boyer, 1996).

Jean Bernoulli (1667-1748), décimo filho de Nicolau, em virtude de seu enorme talento e do prestígio de sua família, cresceu rapidamente como matemático e acabou por tornar-se, de acordo com Garbi (2010), o maior rival do seu irmão. Entretanto, foi por intermédio de Jacques que Jean construiu sua amizade com Leibniz, com quem se uniu para difundir o Cálculo. Quando esteve em Paris, Jean conheceu o Marquês Guillaume François Antoine L'Hospital (1661-1704), a quem ensinou a matemática de Leibniz.

Além disso, Edwards (1979) destaca que, em troca de um salário regular, Jean se comprometeu a enviar ao Marquês todas as suas descobertas matemáticas, para que este último as utilizasse como melhor entendesse. Desse acordo, surgiu o primeiro livro texto sobre o Cálculo, publicado por L'Hospital em 1696, intitulado *Analyse des infiniment petits*[13]. Esse trabalho é lembrado até os dias atuais, devido a uma descoberta de Bernoulli, conhecida como regra de L'Hospital para formas indeterminadas.

[12] O Analista.

[13] Análise dos infinitamente pequenos.

Boyer (1959) afirma que os irmãos Bernoulli tinham perspectivas diferentes em relação ao Cálculo. Enquanto Jean demonstrava uma atitude positiva frente aos infinitesimais, Jacques, com mais cautela, afirmava que o infinitamente pequeno não deveria ser pensado como uma quantidade específica, mas como um fluxo perpétuo em direção ao nada.

3.8 Leonhard Euler

Apesar de o Marquês L'Hospital ter sido o responsável pela publicação do primeiro livro texto sobre o Cálculo, foram os dois volumes de *Introductio in analysin infinitorum*[14], publicados pelo suíço Leonhard Euler, em 1748, que forneceram uma nova visão sobre a Matemática. Nessa obra, Euler abordou o conceito de função e ainda fez avançar os processos infinitos, estudando diversos tipos de séries (Edwards, 1979).

Antes de Euler, Jean Bernoulli utilizou a palavra "função", em 1698, em um artigo dedicado à solução de um problema proposto por Jacques. Roque (2012) destaca que, no final do século XVIII, Jean já relacionava a concepção de função com quantidades que eram constituídas a partir de quantidades indeterminadas e outras constantes.

Foi na obra de Euler, *Introductio*, portanto, que o conceito de função veio a ocupar um papel central na Matemática. O Cálculo passou a ser visto pelo suíço como um estudo das funções, o que lhe permitiu aritmetizar ideias geométricas e distanciar a Análise das concepções relacionadas à Geometria Clássica.

Boyer (1996) enfatiza que, a partir da publicação de Euler, a ideia de função se tornou o cerne da Análise Matemática. No começo de *Introductio*, o matemático suíço propôs sua definição: "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma forma, por essa quantidade variável e por números, ou quantidades constantes" (Euler, 1988, p. 3).

Já em *Institutiones Calculi Differentialis*[15], obra publicada em 1755, de acordo com Edwards (1979), Euler utilizou suas expansões para derivar funções elementares, a partir da ideia de diferenciais proposta por Leibniz. O matemático suíço simplesmente desconsiderava, no seu processo, diferenciais de ordem mais alta.

Além disso, em *Institutiones*, Euler trouxe uma nova definição de função. Essa ideia originou-se da controvérsia sobre as cordas vibrantes[16], que tornou a sua definição inicial obsoleta. No prefácio do seu livro, Euler escreveu:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade dada pode ser determinada por outras. Correspondentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x (*apud* Roque, 2012, p. 378).

Com suas ideias, conforme argumenta Boyer (1959), Euler transcendeu seus predecessores, que, em sua maioria, limitavam o Cálculo às fronteiras da Geometria. Assim,

[14] Introdução à Análise Infinita.
[15] Fundamentos de Cálculo Diferencial.
[16] Célebre problema da área da Física-Matemática.

construiu uma teoria formal a partir da sua definição de função, que não necessitava mais ser convertida constantemente para diagramas nem traduzida em concepções geométricas.

3.9 Jean Le Rond D'Alembert

O francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) angariou uma ampla educação formal, estudando Direito, Medicina e Matemática. Considerando discutíveis algumas atitudes matemáticas de Euler, D'Alembert não consentia com a ideia de que os diferenciais poderiam ser assumidos como representações de quantidades que são zero, mas são qualitativamente diferentes. O francês criou, então, uma nova visão para o Cálculo, focando na ideia de limite.

De acordo com Edwards (1979), D'Alembert trouxe o primeiro argumento incisivo para resolver as dúvidas levantadas por Berkeley. Definiu a derivada como um limite de quocientes de incrementos, seguindo a ideia trazida, mas não demonstrada, por Newton. D'Alembert apresentou uma percepção do conceito de derivada que, atualmente, pode ser expressa pela seguinte igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

D'Alembert afirmava que uma quantidade deve ser alguma coisa ou nada, ou seja, argumentava que o fato de supor que existisse um estado intermediário entre esses dois era um absurdo. Dessa forma, rejeitava a ideia de que os diferenciais eram grandezas infinitamente pequenas e definia-os como uma notação que se referia aos limites.

Vendo a teoria dos limites como a verdadeira metafísica do Cálculo, D'Alembert definiu, no verbete "limite", de sua Enciclopédia, que uma quantidade é dita o limite de outra quando a segunda quantidade pode aproximar-se da primeira, mais do que qualquer quantidade dada. O francês afirmou que, apesar de a quantidade aproximante chegar cada vez mais perto do seu limite, não pode coincidir com ele nem mesmo o ultrapassar.

3.10 Joseph Louis Lagrange

O italiano Lagrange (1736-1813) foi considerado o segundo maior matemático do século XVIII, atrás apenas de Euler. Chegou, em 1766, ao posto de matemático oficial da Prússia, cargo que ocupou até ir para a França lecionar nas escolas Normale e Polytechnique.

Lagrange ministrou cursos de Análise Matemática e redigiu material de apoio para suas aulas, o que, desde então, tem sido considerado como texto clássico sobre o Cálculo. Os resultados construídos foram publicados em 1797, sob o título de *Théorie des Fonctions Analytiques*[17].

Esse trabalho, que originou a expressão "derivada" e a notação $f'(x)$ para designar a derivada de $f(x)$, visava, sobretudo, tornar o Cálculo logicamente mais satisfatório. Foi a partir da evolução do método de Lagrange, envolvendo predominantemente as séries de Taylor, que surgiu a concepção de função derivada, a qual contribuiu efetivamente para a construção da definição ainda em voga atualmente.

O método de Lagrange, como outras criações da época, assim como ocorreu no caso da controvérsia protagonizada por Berkeley, indicava uma insatisfação com as ideias relacionadas a limites, *fluxões* e infinitesimais. Contudo, a expansão em séries de Taylor era

[17] Teoria das Funções Analíticas.

possível somente para funções menos sofisticadas, e a abordagem tinha, então, uma aplicação limitada. Apesar de não conseguir alcançar seu intento, Lagrange influenciou o início da indistinguível teoria das funções de variável real (Boyer, 1996).

3.11 Bernard Bolzano

A nova concepção do Cálculo iniciou-se com a divulgação do primeiro trabalho sobre Análise, de Bernard Bolzano (1781-1848), proveniente do Reino da Bohemia. O então professor da Universidade de Praga publicou, em 1817, a obra *Rein Analytischer Beweis*[18], na qual se propôs a construir uma prova totalmente analítica para o teorema do valor intermediário para funções contínuas.

Fo assim que se iniciou o período do rigor formal na Matemática. Com relação ao Cálculo, essa postura levou ao estabelecimento de análises lógicas mais profundas do conceito de limite (Boyer, 1959).

Entendendo que concepções geométricas levavam a ideias equivocadas sobre continuidade, Bolzano propôs uma definição baseada no conceito de limite. Afirmou que uma função $f(x)$ é contínua, em um determinado intervalo, se, para qualquer x desse intervalo, a diferença $f(x+\omega)-f(x)$ pode ser feita menor do que qualquer quantidade, fazendo ω ser tão pequeno quanto se queira (Edwards, 1979). Ou seja, Bolzano definiu que $f(x)$ é contínua em um intervalo se para todo x desse intervalo:

$$\lim_{\omega \to 0} f(x+\omega) = f(x)$$

Sobre a questão da notação dy/dx, Bolzano argumentou tratar-se de um símbolo para designar a função derivada. Destacou também que a notação não deveria ser entendida como uma razão entre dy e dx nem como um quociente de zero por zero (Boyer, 1959).

De acordo com Edwards (1979), o trabalho de Bolzano não foi divulgado na época, de forma que a sua influência imediata continua incerta. No mesmo período, houve um matemático que desenvolveu ideias muito semelhantes às de Bolzano e que acabou se tornando a figura conhecida por estabelecer as novas bases para o Cálculo Diferencial e Integral. Esse proeminente pensador atendia pelo nome de Augustin Louis Cauchy.

3.12 Augustin Louis Cauchy

Nascido em Paris, Cauchy contribuiu para diversas áreas da Matemática, estudando equações diferenciais, convergência de séries infinitas e probabilidade. É lembrado também como professor e por sua dedicação à causa do rigor matemático (Garbi, 2010).

Publicou três livros texto provenientes das suas aulas: *Cours d'analyse*[19], em 1821, *Resume des leçons sur le calcul infinitesimal*[20], em 1822, e *Leçons sur le calcul differentiel*[21], em 1829. Nesses trabalhos, frisou, por exemplo, a importância de demonstrar a existência de integrais antes de estabelecer suas propriedades e também de construir o conceito de integral entre determinados limites, ou seja, a noção de integral definida (Edwards, 1979). Ademais, trouxe uma definição de função e descreveu sua ideia sobre a noção de limite, afirmando que,

[18] Prova Puramente Analítica.
[19] Curso de análise.
[20] Resumo das aulas sobre o cálculo infinitesimal.
[21] Lições sobre o cálculo diferencial.

quando valores atribuídos sucessivamente a uma determinada variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de forma que acabam diferindo deste último em uma quantidade tão pequena quanto se queira, esse valor fixo é chamado de limite de todos os outros valores.

O matemático francês promoveu uma reconciliação com os infinitesimais. Cauchy expressou um infinitesimal simplesmente como uma variável cujo limite era zero. Pode-se depreender que Cauchy se referia, na sua definição, a uma variável dependente, ou função $f(x)$, por exemplo, que se aproxima cada vez mais de zero, à medida que $x \to 0$.

A partir de suas ideias sobre limite e infinitesimal, Cauchy propôs definições para os conceitos de derivada e integral. De acordo com Boyer (1996), o matemático francês definiu a derivada afirmando que, se há uma função $y = f(x)$ e se incrementa-se a variável x de $\Delta x = i$, de forma que se possa estabelecer a razão $\Delta y/\Delta x$, então, o limite dessa razão, quando i tende a zero, se existir, é representado por $f'(x)$.

Tratando do conceito de continuidade, Cauchy formulou uma definição muito similar à trazida por Bolzano. Afirmou que uma função $f(x)$ é contínua, em um dado intervalo, se um acréscimo infinitamente pequeno α, em relação à variável x, resulta sempre em um acréscimo infinitamente pequeno na diferença $f(x+\alpha) - f(x)$.

O último conceito desenvolvido por Cauchy foi o de integral definida. Nessa construção, recorreu a muitos dos aspectos que havia estudado anteriormente, como, por exemplo, as ideias de limite e continuidade. Assim, Cauchy estabeleceu, em *Resume des leçons*, de 1823, a integral definida como um limite de somas (Grabiner, 1981).

Até aquele momento, a maioria dos matemáticos rejeitava a definição de Leibniz, que também havia percebido a integral como uma soma, e a integral era vista prioritariamente como uma antiderivada, no sentido trazido por Newton. De acordo com Grabiner (1981), Cauchy começou estabelecendo uma função $f(x)$, contínua em um intervalo $[x_0, X]$, para dividir esse intervalo em n subintervalos, não necessariamente iguais, por meio dos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = X$. A partir dessa subdivisão, o matemático construiu a seguinte soma:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Analisando essa subdivisão, percebeu que, se os comprimentos desses subintervalos se tornam muito pequenos, à medida que n fica cada vez maior, o modo como a subdivisão é feita não influencia o valor de S. Assim, S depende unicamente de $f(x)$ e de x_0 e X, ou seja, S possui um único limite, que Cauchy chamou, então, de integral definida (Edwards, 1979).

Cauchy alertou também que a integração não deveria mais ser interpretada como uma soma de produtos, mas como o limite dessa soma, propondo a seguinte notação:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

Ademais, Cauchy argumentou que, apesar de ser definida independentemente, a integração constitui-se no processo inverso da diferenciação. Nesse sentido, construiu o que talvez tenha sido, de acordo com Boyer (1959), a primeira demonstração rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo. Ele provou que, se f é um função contínua, então:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Além disso, para deduzir, dessa primeira forma, a segunda expressão utilizada para designar o Teorema Fundamental do Cálculo, Cauchy considerou a função $F(x)$, de tal modo que $F'(x) = f(x)$, no intervalo $[x_0, X]$, concluindo que:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$$

para qualquer antiderivada F de f.

3.13 Karl Wihelm Theodor Weirstrass

O jovem alemão Karl Weirstrass (1815-1897), ao concluir sua educação básica, foi enviado por seu pai para a Universidade de Bonn, para estudar administração e leis, de maneira que pudesse, posteriormente, galgar uma posição como servidor público. Entretanto, sem interesse por essas áreas do conhecimento, não concluiu sua graduação.

Em 1838, foi para a Academia de Münster, com o objetivo de participar de um curso de Matemática que pudesse dar-lhe o *status* de professor de Ensino Fundamental. Seu desempenho no curso acabou sendo tão bom que recebeu, em 1841, uma permissão especial do governo para ensinar Matemática e Física no Ensino Médio da época (Sinkvich, 2015).

Depois de passar seis anos lecionando na cidade de Walcs, na atual Polônia, Weirstrass passou a lecionar em Braunsberg, localizada na região oeste da Prússia. Tendo recebido, em 1854, o diploma de PhD *honoris causa* da Universidade de Königsberg, em virtude do seu trabalho sobre funções abelianas, Weirstrass habilitou-se para trabalhar no Ensino Superior. Em 1856, mudou-se para Berlim, onde passou a lecionar no Instituto Industrial da cidade e na Universidade de Berlim (Sinkvich, 2015).

Na esfera do Cálculo, de acordo com Grabiner (1981), Weirstrass levou adiante a tarefa iniciada por Cauchy e formalizou suas definições. Weirstrass formulou, por exemplo, a definição puramente aritmética do conceito de limite, substituindo a descrição dinâmica por uma totalmente estática. Weirstrass escreveu que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Conforme argumenta Boyer (1959), essa expressão, em conjunção com as definições de Cauchy de derivada e integral, forneceu a precisão que constituiu a base para a formulação rigorosa do Cálculo. Assim, "com vários desses limites aparecendo na reformulação do Cálculo, a aritmetização da análise estava completa, e o Cálculo assumiu, então, precisamente a forma com a qual aparece nas explicações do século vinte" (Edwards, 1979, p. 333).

3.14 A Integral de Riemann

Nascido na Alemanha, Georg Riemann (1826-1866) estudou nas universidades de Berlim e de Göttingen. Em 1854, candidatou-se para a posição de professor de Göttingen e, ao apresentar seu trabalho para a banca examinadora, da qual fazia parte Carl Friedrich Gauss (1777-1855), introduziu a ideia de espaços com mais de três dimensões.

Trabalhando com o conceito de integral, Riemann criou uma generalização da ideia de Cauchy. Riemann afirmou que, para estabelecer corretamente $\int_a^b f(x)\,dx$, se deve tomar uma sequência de valores, entre a e b, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, e, para abreviar, chamar $x_1 - a$ de δ_1, $x_2 - x_1$ de δ_2, ... e $b - x_{n-1}$ de δ_n, e denotar frações próprias e positivas por ε_i. Sendo assim, o valor da soma:

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

depende da escolha dos intervalos δ_i e das frações ε_i. Essa soma tende sempre a certo limite A, uma vez que todos os deltas se tornam infinitamente pequenos. Esse valor A foi, então, chamado por Riemann de $\int_a^b f(x)\,dx$.

O matemático alemão escolheu pontos arbitrários $x_i^* = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$, dentro de cada subintervalo da partição construída em $[a, b]$, e definiu a integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

com δ caracterizando o comprimento máximo dos δ_i dos subintervalos da partição.

A integral de Riemann[22] diferiu e avançou, então, em relação à definição dada por Cauchy. A primeira e importante sofisticação reside no fato de Cauchy ter tomado aproximações esquerdas para $f(x)$, em cada subintervalo de $[a, b]$, enquanto Riemann abriu a possibilidade de se escolher um ponto arbitrário em cada um desses subintervalos. Além disso, e provavelmente ainda mais importante, Cauchy trabalhou somente com funções contínuas[23], enquanto o matemático alemão não fez uso dessa condição (Grabiner, 1981).

4 Considerações finais

Analisando-se a construção histórica do conceito de integral, pode-se perceber que sua gênese se vincula à vontade do ser humano de explicar e resolver situações corpóreas. Assim, experiências foram realizadas com artefatos palpáveis, como os barris de vinho de Kepler, e imaginários, como as finas fatias de sólidos criadas por Arquimedes.

Foi só no século XVII que Newton e Leibniz trouxeram uma nova realidade para o Cálculo, a partir da construção de métodos algébricos e algorítmicos para o cálculo de taxas de variação e áreas. Foi a partir desse período que esse campo do conhecimento matemático passou a ser percebido também e de forma mais intensa no Mundo Operacional Simbólico.

Ainda assim, dúvidas sobre as quantidades arbitrariamente pequenas e processos infinitos pairavam no ar e tiravam o sono dos pensadores da época. Esse problema acabou sendo resolvido com a introdução da definição do conceito de limite, por meio de épsilons e deltas, trazida por Weirstrass. Foi assim que, cerca de dois mil e cem anos depois das primeiras ideias sobre integração, criadas por Arquimedes, o Cálculo ingressou no Mundo Formal Axiomático, e a Análise Matemática entrou, definitivamente, em cena.

Em contrassenso com o panorama histórico construído, as aulas de Cálculo são, na sua maior parte, conduzidas com uma lógica inversa, abordando, nessa ordem, limites, derivadas e, então, integrais (Bueno, 2022). Essa realidade remonta aos cursos de Análise propostos por Cauchy na École Polytechnique em meados do século XIX.

[22] Posteriormente, o francês Henri Lebesgue (1875-1941) definiu a integral de Lebesgue, que se tornou o padrão de estudos da Matemática pura avançada.
[23] Assumindo implicitamente a ideia de continuidade uniforme.

Seguindo esse paradigma dominante de ensino, acredita-se, no entanto, que se contribui para criar uma barreira cognitiva considerável entre os mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, habitados pelos acadêmicos que ingressam nas universidades, e o Mundo Formal Axiomático, habitado pelos professores de Cálculo.

Tall e Mejía-Ramos (2004) destacam que essa prática se caracteriza por tentar introduzir conceitos de uma esfera “superior” à dos alunos, habitada pelos matemáticos, por meio de definições e provas formais. Essa situação leva os estudantes a enfrentarem concepções que requerem grandes reconsiderações de suas crenças, construídas a partir de experiências que podem não ser coerentes com as definições propostas.

Giraldo (2004) destaca que a utilização de definições formais pode configurar-se em um obstáculo para os alunos em estágios tenros de aprendizagem do Cálculo. Segundo o autor, um obstáculo inicial apresenta-se na utilização da própria linguagem, pois as definições matemáticas são feitas a partir de palavras que possuem certo significado na linguagem natural, mas que devem ser abstraídas desses significados para que a compreensão das definições seja construída.

Dessa forma, entende-se que a introdução ao estudo do conceito de integral não deve ser feita a partir de um mundo muito sofisticado, que enxerga o Cálculo pelas lentes do conceito de limite, um já-encontrado típico dos matemáticos, mas complexo demais para quem nunca realizou sequer uma incursão ao Mundo Formal Axiomático. Sugere-se, então, que a introdução ao estudo do conceito de integral seja realizada mediante a realidade matemática mais próxima dos alunos dos semestres iniciais de cursos de Ciências Exatas.

Essa proposta, entretanto, não indica que se deve partir da Matemática do ponto de vista de um profissional e apenas simplificar as suas ideias, formalmente construídas, até que se chegue a uma abordagem meramente intuitiva. Em oposição a essa ideia, trata-se de construir um ponto de vista da base, desenhado cuidadosamente para alcançar as sutilezas matemáticas a partir da posição em que o estudante se encontra. Para alcançar esse objetivo, é necessária a construção de uma integração entre a Matemática e a percepção que os acadêmicos trazem sobre essa ciência e seus conceitos (Tall, 2013).

Uma abordagem com esse viés é trazida, por exemplo, no trabalho de Bueno (2022), que, utilizando a Modelação Matemática, de acordo com Biembengut (2016), introduziu o conceito de integral a partir de visões corporificadas. Utilizando seus já-encontrados, os estudantes envolvidos nessa prática pedagógica puderam ingressar no estudo da integral vendo-a como uma antiderivada, assim como fez Newton. Em um segundo momento, passaram a estudá-la buscando encontrar áreas abaixo de curvas, da mesma forma que fez Leibniz. No terceiro momento, os participantes da pesquisa de Bueno (2022, p. 184) construíram uma conexão entre as duas abordagens e “compreenderam a relação entre a integral como uma antiderivada, na visão de Newton, e como uma ferramenta matemática para o cálculo da área abaixo de uma curva, partindo da percepção de Leibniz”.

Em situações assim, traz-se uma abordagem corpórea e próxima do mundo matemático habitado pelos estudantes universitários de semestres iniciais. Usando ideias semelhantes às de Newton e Leibniz, que perceberam o Cálculo a partir de já-encontrados vindos da Geometria, da Aritmética e da Álgebra, é possível oferecer uma abordagem mais intuitiva ao estudo inicial do conceito de integral, que, assim, é construído com base em conhecimentos dos estudantes, e não de já-encontrados pertencentes ao mundo formal axiomático, que eles ainda não conhecem.

Referências

ALEXANDER, A. **Infinitesimal:** a teoria matemática que revolucionou o mundo. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

BACKENDORF, V. R.; BASSO, M. V. A. GeoGebra na Aprendizagem de Conceitos de Matemática Avançada. **Novas Tecnologias na Educação***,* v. 16, n. 1, 2018.

BARDI, J. S. **A guerra do cálculo.** Rio de Janeiro: Record, 2008.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BONFIM, S. H.; CALÁBRIA, A. R. **O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz**: aproximações e distanciamentos no método. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BOYER, C. B. **The history of the calculus and its conceptual development***.* New York: Dover Publications, 1959.

BOYER, C. B. **História da matemática***.* São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BUENO, R. W. S. Os Três Mundos da Matemática, a Modelação e o Conceito de Integral. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 7, n. 1, 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athenas, 1997.

EDWARDS, C. H. **The historical development of calculus**. New York: Springer, 1979.

EULER, Leonhard. **Introduction to Analysis of the Infinite**. New York: Springer, 1988.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FRANT, J. B. Prefácio. In: FONSECA, L. (org.). **Didática do Cálculo***:* epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências***:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais**: o caso da derivada. Tese. (Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GLEICK, J. **Isaac Newton**. São Paulo: Companhia das Letras, 2004.

GRABINER, J. V. **The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus**. Cambridge: MIT Press, 1981.

ROQUE, T. **História da matemática***:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Rio de Janeiro: Record, 1999.

TALL, David. Thinking trough three worlds of mathematics. In: **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 28, 2004, Bergen, Norway, 2004.

TALL, David. **How Humans Learn to Think Mathematically***:* exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge, 2013.

TALL, David; LIMA, R. N.; HEALY, L. Evolving a Three-World Framework for Solving Algebraic Equations in the Light of What Student Has Met Before. **Journal of Mathematics Behavior**, 34 2014.

TALL, D.; MEJÍA-RAMOS, J. P. Reflecting on Post-Calculus Reform. In: International Congress of Mathematics Education, 2004, Copenhagen, DK. **Proceedings…** Plenary for Topic Group 12: Calculus. Copenhagen, DK, 2004.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the middle of the 19th Century. **Archive for History of Exact Sciences***,* v. 16, n. 1, 1976.