



Abordagem da Geometria Fractal na Licenciatura em Matemática

Gabriela Costa Bonato

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

Caxias do Sul, RS – BRASIL

lattes.cnpq.br/2639870194770085

gabriela.bonato@hotmail.com

orcid.org/0000-0003-2139-7054

Carollayne Cesar Vissirini

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

Caxias do Sul, RS – BRASIL

lattes.cnpq.br/4706115925995685

carollayne.vissirini@gmail.com

orcid.org/0000-0002-7496-1301

Greice da Silva Lorenzzetti Andreis

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

Caxias do Sul, RS – BRASIL

lattes.cnpq.br/1146104646969214

greice.andreis@caxias.ifrs.edu.br

orcid.org/0000-0002-8674-0223

Abordagem da Geometria Fractal na Licenciatura em Matemática

Resumo

Este relato de experiência trata do estudo da Geometria Fractal como uma possibilidade de aplicação na Educação Básica. A prática foi realizada na disciplina de Tendências em Educação Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Caxias do Sul. O objetivo deste relato é discorrer sobre por que utilizar a Geometria Fractal em sala de aula, bem como apresentar uma possibilidade de sua aplicação. Diferente da Geometria Euclidiana que está relaciona muitas vezes a produções humanas, a Geometria Fractal está relacionada à natureza, sendo este um incentivado para seu estudo. Na prática de ensino desenvolvida, conceituou-se o que são fractais em conjunto com os estudantes da licenciatura e aplicou-se uma atividade de construção manual de fractais com régua, esquadro e compasso. Foram apresentadas aplicações dos fractais na natureza e os cálculos de dimensões, que utilizam conceitos de potenciação e logaritmos, foram explorados. Para conclusão da prática, os estudantes criaram fractais com o auxílio do software GeoGebra. A prática foi desenvolvida e refletida com os estudantes da Licenciatura em Matemática, sendo adaptável a estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: geometria fractal; educação básica; ensino médio.

Approach to Fractal Geometry in the Mathematics Degree

Abstract

This experience report explores the study of Fractal Geometry as a possible application in Basic Education. The activity was carried out as part of the Mathematics Education Trends course in the Mathematics Teaching Degree Program at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Sul, Caxias do Sul Campus. The purpose of this report is to discuss the reasons for using Fractal Geometry in the classroom and to present a possible way to implement it. Unlike Euclidean Geometry, which is often associated with human-made structures, Fractal Geometry is connected to nature, which serves as a motivation for its study. During the teaching activity, the concept of fractals was explored together with the undergraduate students, and a hands-on activity involving the manual construction of fractals using a ruler, set square, and compass was conducted. Applications of fractals in nature were presented, and the calculation of dimensions—using concepts of exponentiation and logarithms—was also explored. To conclude the activity, students created fractals with the help of GeoGebra software. The practice was developed and reflected upon with undergraduate mathematics students and is adaptable for use with high school students.

Keywords: fractal geometry; basic education; high school.

Enfoque de Geometría Fractal en el Grado de Matemáticas

Resumen

Este informe de experiencia aborda el estudio de la geometría fractal como una posibilidad de aplicación en la educación básica. La práctica se llevó a cabo en el curso de Tendencias de Educación Matemática del Curso de Grado en Matemáticas en el Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Caxias do Sul. El propósito de este informe es discutir por qué usar Geometría Fractal en el aula, además de presentar una posibilidad de su aplicación. A diferencia de la Geometría Euclidiana, que a menudo está relacionada con la producción humana, la Geometría Fractal está relacionada con la naturaleza, lo cual es un incentivo para su estudio. En la práctica docente desarrollada, los fractales se conceptualizaron junto con estudiantes de pregrado y se aplicó una actividad de construcción fractal manual con regla, cuadrado y compás. Se presentaron aplicaciones de fractales en la naturaleza y se exploraron cálculos de dimensiones, utilizando conceptos de potenciación y logaritmos. Para completar la práctica, los estudiantes crearon fractales con la ayuda del software GeoGebra. La práctica fue desarrollada y reflejada con los estudiantes del Grado en Matemáticas, siendo adaptable a los estudiantes de secundaria.

Palabras clave: geometría fractal; educación básica; escuela secundaria.

1 Introdução

Conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (SEB, 2006, p. 75), o estudo da Geometria no Ensino Médio deve auxiliar no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas práticos dos estudantes, como a sua orientação no espaço, a leitura de mapas, a realização de estimativas e de comparações entre distâncias, e o cálculo de comprimentos, áreas e volumes, fortalecendo os conceitos básicos abordados no Ensino Fundamental.

Levando em consideração a diversidade dos projetos político pedagógicos que as escolas podem ter, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio apontam alguns temas complementares que podem enriquecer os conhecimentos de Matemática neste nível de ensino:

O estudo de poliedros, o Teorema de Euler e a classificação dos poliedros platônicos compõem um interessante tópico, em que a construção dos poliedros, via planificações feitas com régua e compasso, pode ser uma atividade de grande satisfação estética. Na direção de valorização da Matemática, no seu aspecto estético, existem alguns vídeos que podem servir como ponto de partida de

discussão de assuntos tais como simetrias, fractais, o número de ouro, etc. (SEB, 2006, p. 93).

Observa-se que a Geometria Euclidiana faz parte dos conhecimentos básicos abordados na Educação Básica e alguns tópicos de Geometria não-Euclidiana, como os fractais, são trabalhados de forma complementar, quando os professores dispõem de tempo para aprofundar tais conhecimentos matemáticos.

As Geometrias plana e espacial que são ensinadas na Educação Básica fazem parte do que conhecemos como Geometria Euclidiana, a qual foi escrita, de maneira axiomática e dedutiva pelo matemático grego Euclides de Alexandria, na obra Elementos, aproximadamente no ano 300 a.C. (Dario, 2014). Raramente aborda-se a Geometria Fractal, que é uma Geometria não-Euclidiana presente, por exemplo, na natureza. Neste contexto, foi desenvolvida, na disciplina de Tendências em Educação Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Caxias do Sul, no ano de 2018, uma abordagem para o estudo de fractais no Ensino Médio.

A ideia apresentada para a turma de licenciandos foi utilizar uma das tendências em Educação Matemática para explorar determinado conteúdo. A atividade foi desenvolvida em grupos, cada um com um tema diferente. Optamos por trabalhar com o estudo de fractais utilizando material concreto e, posteriormente, com o software GeoGebra. Nesse relato, é possível visualizar os resultados dessa vivência com a intenção de compartilhar uma possível forma de abordagem deste conteúdo na licenciatura e no Ensino Médio.

2 Geometrias euclidiana e não-euclidiana

Acredita-se que a Geometria Euclidiana tenha sido criada por Euclides no Antigo Egito, no Vale do Rio Nilo, pela necessidade de efetuar cálculos de medições de terras. Para Heródoto, a Geometria originou-se no Egito pela necessidade da prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação

anual do Vale do Rio Nilo (Boyer, 1994, p. 4). Euclides de Alexandria desenvolveu os conceitos e relações da Geometria Euclidiana em cima de cinco postulados:

Postulado 1: Pode ser desenhada uma linha reta conectando qualquer par de pontos, ou seja, é possível traçar um segmento de reta partindo de um ponto para qualquer outro;

Postulado 2: Qualquer segmento de reta pode ser estendido indefinidamente pela linha reta, ou seja, é possível prolongar qualquer segmento de reta tanto quanto desejarmos;

Postulado 3: Dado um segmento de reta, um círculo pode ser desenhado tendo o segmento como raio e um dos seus extremos como o centro, ou seja, é possível traçar uma circunferência de centro em qualquer ponto e com um raio que tenha a medida do segmento de reta escolhido;

Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes, ou seja, são iguais entre si;

Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se foram estendidas indefinidamente (Euclides, 2009, apud Silva; Yonezawa, 2017, p. 144).

Com o passar do tempo, surgiram questionamentos sobre o Postulado 5, também conhecido como Postulado das Paralelas. Alguns matemáticos tentaram provar o quinto postulado de Euclides, e acabaram desenvolvendo as Geometrias não-Euclidianas (Silva; Yonezawa, 2017, p. 146).

Lobatchevsky em 1829, negou o quinto postulado de Euclides, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas. Ele foi a (sic) primeiro a publicar esta teoria, por isso é considerado o fundador oficial das geometrias não euclidianas, embora Gauss em 1824 numa carta enviada a Taurinus, já soubesse dessa possibilidade. Em 1832, Bolyai, independentemente, obteve os mesmos resultados. Essa geometria passou a ser chamada de geometria hiperbólica. Em 1854, Riemann nega o quinto postulado de Euclides admitindo a outra negação: por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir uma reta paralela à reta dada. Essa outra geometria não euclidiana passou a ser chamada de geometria esférica. (Bongiovanni; Jahn, 2010, p. 44).

Conforme aponta Kaleff (2010), com a criação das novas Geometrias foi possível buscar explicações a respeito do mundo físico por meio de ferramentas ligadas à Teoria da Relatividade. Os conceitos anteriores ao século XIX foram considerados insuficientes para a representação dos fenômenos físicos. Apesar

do conhecimento daquela época dar conta de descrever as regularidades do meio ambiente, os conceitos geométricos existentes não descreviam precisamente as formas fragmentadas e irregulares encontradas na natureza.

O termo fractal surgiu em meados do século XX, com o matemático Benoit Mandelbrot, e “[...] refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares e partidos, cuja dimensão pode ser expressa por um número não inteiro, fugindo da noção de duas e três dimensões referentes aos objetos do plano e do espaço euclidianos” (Kaleff, 2010, p. 4).

Contudo, não foi Benoit Mandelbrot quem os inventou. Conforme Assis et al. (2008, p. 2304-2306), “Entre a segunda metade do século XIX e a primeira metade do século XX, foram propostos vários objetos matemáticos com características especiais que foram, durante muito tempo, considerados como ‘monstros matemáticos’”, por desafiarem as noções de infinito e por não terem uma explicação objetiva. Alguns dos matemáticos que criaram estes “monstros da matemática”, posteriormente chamados de fractais, foram: Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943), Helge Von Koch (1870-1924) e Wacław Sierpinski (1882-1969).

3 A Geometria Fractal

Segundo Barbosa (2005, p. 19), alguns autores conceituaram os fractais da seguinte forma:

Mandelbrot e seu primeiro conceito de fractal - “Um fractal é por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.”

J. Feder - “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”.

K. J. Falconer - “Um conjunto F é fractal se, por exemplo: (1) F possui alguma forma de ‘autossimilaridade’ e ainda que aproximada ou estatística; (2) a dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que dimensão topológica; (3) o conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo”.

Com tais definições citadas por Barbosa (2005), nota-se que há diferentes maneiras de conceituar um fractal, entretanto pode-se reunir algumas

características ao se analisar cada significação. As principais propriedades que caracterizam e que permitem definir os fractais são apresentadas na tabela 1.

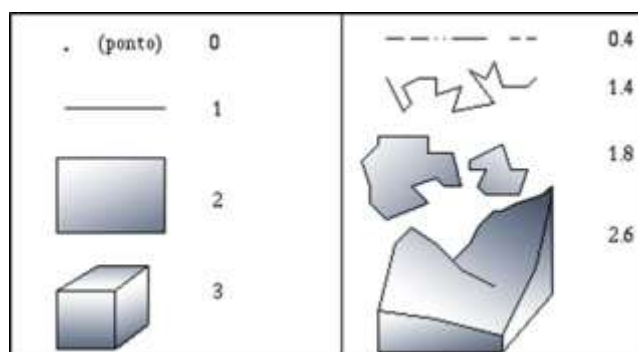
Tabela 1 - Principais propriedades dos fractais

Propriedade	Conceituação
Auto-similaridade	Uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, em uma escala menor.
Complexidade infinita	A geração de uma figura é realizada de forma recursiva.
Dimensão	A dimensão de um fractal assume quantidades fracionárias, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.

Fonte: Baseado em Assis et al. (2008, p. 2304-2302).

Barbosa (2014) traz que na Geometria Fractal, Mandelbrot voltou-se para uma compreensão diferente da ideia das dimensões 0, 1, 2 e 3, devido às medidas euclidianas não serem satisfatórias no estudo das formas irregulares. Com isso, desenvolveu a dimensão fracionada também conhecida como dimensão fractal. Na figura 1, apresenta-se uma comparação entre a dimensão euclidiana e a dimensão fractal.

Figura 1: Dimensão euclidiana (esquerda) e dimensão fractal (direita)



Fonte: Siqueira (2005).

Sempre que um fractal apresenta auto similaridade estrita, ou seja, uma porção do fractal reproduz exatamente a forma de uma porção maior, é determinada sua dimensão por um procedimento simples. Quando um fractal

apresenta auto similaridade estrita, sua dimensão pode ser determinada por um método simples que se delineia a passagem de um dado nível na construção do fractal para o nível imediatamente seguinte (Serra, 1997, p. 14).

Assim, a dimensão fractal (*Dim*) é calculada pela seguinte fórmula:

$$Dim = - \frac{\log n}{\log r} \quad (1)$$

onde *n* corresponde ao número total de partes e *r* representa o fator de escala, isto é, a razão de semelhança.

Para que não haja dúvidas em relação à dimensão fractal, Barbosa (2014, p. 37) relata algumas informações relevantes:

- O conceito de dimensão fractal (espacial ou fracionada) se relaciona com a quantidade de espaço que o objeto ocupa entre Dimensões Euclidianas;
- Independente do número de interações a dimensão permanece a mesma, dessa forma, geralmente no cálculo da dimensão espacial, se trabalha com os dados da primeira interação por ser menos trabalhoso;
- Nas figuras perfeitas da Geometria Euclidiana a dimensão espacial coincide com a dimensão topológica, por isso são representadas por números inteiros, nos fractais isso não acontece necessariamente. A Curva de Koch, por exemplo, têm (sic) dimensão topológica 1 e dimensão espacial aproximadamente 1,262.

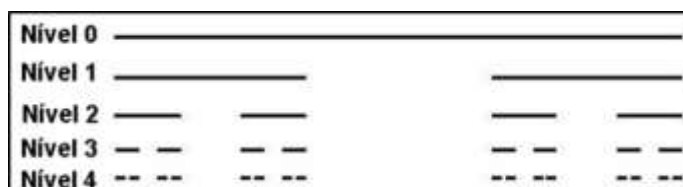
A seguir, apresentamos alguns fractais precursores.

3.1 Conjunto de Cantor

Conforme Almeida e Santos (2017), George Cantor (1845-1918) foi o criador da teoria dos conjuntos, contribuindo muito com a matemática moderna. O trabalho de Cantor objetivava entender as diferentes maneiras da infinitude dos conjuntos. A construção do Conjunto de Cantor é realizada tomando um segmento de reta, partindo-o em três segmentos iguais e retirando o pedaço intermediário. Os dois segmentos restantes são novamente repartidos em três segmentos iguais, retirando segmentos intermediários. O processo de repartição

e retirada de segmentos intermediários prossegue ao infinito (Almeida et al., 2006, p. 3). Na figura 2 apresentam-se os primeiros níveis de construção desse conjunto.

Figura 2: Primeiros níveis de construção do Conjunto de Cantor



Fonte: Assis et al. (2008, p. 2304-2306).

Na tabela 2, apresentam-se a quantidade de segmentos do Conjunto de Cantor para cada nível e o seu comprimento. Notemos que, nessa estrutura, o número de segmentos tende ao infinito e o comprimento de segmento tende a zero.

Tabela 2 - Segmentos do Conjunto de Cantor

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento do segmento
0	1	1
1	2	1/3
2	4	1/9
3	8	1/27
4	16	1/81
n	2^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Fonte: Elaboração dos autores (2020).

Utilizando a equação (1), obtemos a dimensão fractal para o Conjunto de Cantor:

$$Dim = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309297536..$$

Com isso, concluímos que o Conjunto de Cantor possui dimensão fractal aproximadamente 0,6309, entre as dimensões 0 e 1.

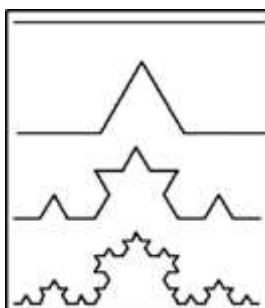
3.2 Curva de Koch

Segundo Adames e Dalpiaz (2016, p. 7), a Curva de Koch, “[...] publicada em 1906 em um artigo do matemático Suéco Helge von Koch, foi a primeira curva construída a partir de procedimentos elementares da geometria sem apresentar tangente em nenhum ponto”. Para sua construção, toma-se um segmento de reta e, fixando um de seus lados, obtém-se a Curva de Koch ao se repetir infinitas vezes o seguinte processo (Adames; Dalpiaz, 2016, p. 16):

1. Divide-se cada um dos segmentos de reta em três segmentos de igual comprimento.
2. Desenha-se triângulos equiláteros com bases formadas pelos terços médios de cada segmento dividido no primeiro passo, de modo que todos os triângulos estejam do lado da poligonal induzido pela escolha inicial.
3. Apaga-se os segmentos centrais obtidos no primeiro passo.

Na figura 3 apresentam-se os primeiros níveis para a construção da Curva de Koch.

Figura 3: Primeiros níveis de construção da Curva de Koch



Fonte: Assis et al. (2008, p. 2304-2305).

Na tabela 3, verifica-se a quantidade de segmentos da Curva de Koch para cada nível e o comprimento dos segmentos.

Tabela 3: Segmentos da Curva de Koch

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento do segmento
0	1	1
1	4	4/3
2	16	16/9
3	64	64/27
n	4^n	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Elaboração dos autores (2020).

Utilizando a equação (1), obtemos a dimensão fractal para a Curva de Koch:

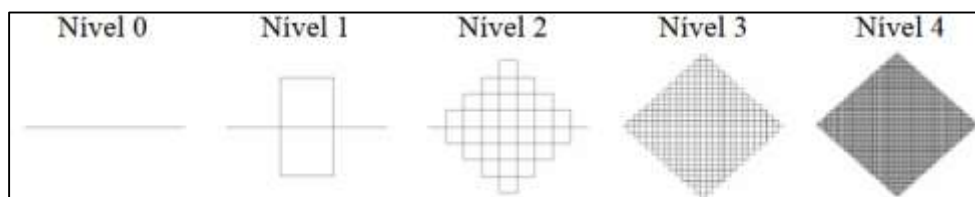
$$Dim = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,261859507...$$

Com isso, concluímos que a Curva de Koch possui dimensão fractal aproximadamente 1,2618, entre as dimensões 1 e 2.

3.3 Curva de Peano

De acordo com Nunes (2006), Giuseppe Peano (1858-1932) descreveu a primeira curva em 1890 e, posteriormente, outros matemáticos descobriram outras curvas que por possuíam características comuns à primeira, ditas Curvas de Peano. Na construção da Curva de Peano, inicia-se com um segmento de reta que é substituído por uma curva de 9 segmentos de medida igual a 1/3 do comprimento do segmento inicial. O método é realizado sucessivamente, substituindo cada segmento anterior pela curva de 9 segmentos (Barbosa, 2014, p. 24), conforme apresentado na figura 5.

Figura 5: Segmentos da Curva de Peano



Fonte: Barbosa (2014, p. 24).

Na tabela 5, apresentam-se a quantidade de segmentos da Curva de Peano para cada nível e o comprimento dos segmentos.

Tabela 5: Primeiros níveis da construção da Curva de Peano

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento do segmento
0	1	1
1	9	9/3
2	81	81/9
n	9^n	$\left(\frac{9}{3}\right)^n$

Fonte: Elaboração dos autores (2020).

Utilizando a equação (1), obtemos a dimensão fractal para a Curva de Peano:

$$Dim = -\frac{\log 9}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

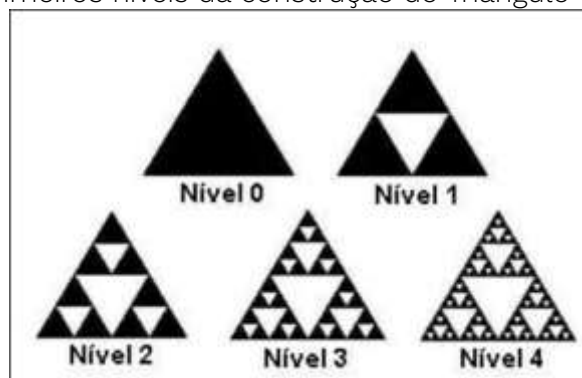
Com isso, concluímos que a Curva de Peano possui dimensão fractal igual a 2, o que implica em uma superfície plana. Repetindo sucessivamente os passos de construção da Curva de Peano, obtemos um quadrado completamente preenchido (Nunes, 2006).

3.4 Triângulo de Sierpinski

Conforme Almeida et al. (2006, p. 4) descrevem, “o conjunto conhecido como Triângulo de Sierpinski foi criado pelo matemático polonês Wacław Sierpinski em 1916 e possui, além de características e propriedades fractais, relação com o triângulo aritmético de Pascal”. O Triângulo de Sierpinski é a figura

obtida a partir de um triângulo equilátero, após infinitas iterações do processo de remoção do triângulo definido pelos pontos médios de suas arestas, de cada triângulo equilátero (Adames; Dalpiaz, 2016, p. 26), conforme pode ser observado na figura 4.

Figura 4: Primeiros níveis da construção do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Assis et al. (2008, p. 2304-2304).

Na tabela 4 apresentam-se a quantidade de triângulos em cada nível para a construção do Triângulo de Sierpinski e o perímetro dos triângulos gerados.

Tabela 4: Segmentos do Triângulo de Sierpinski

Nível	Quantidade de triângulos	Perímetro dos triângulos
0	1	3
1	3	$\frac{3}{2}$
2	9	$\frac{3}{4}$
3	27	$\frac{3}{8}$
4	81	$\frac{3}{16}$
n	3^n	$\left(\frac{3}{2^n}\right)$

Fonte: Elaboração dos autores (2020).

Utilizando a equação (1), obtemos a dimensão fractal para o Triângulo de Sierpinski:

$$Dim = -\frac{\log 3}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,584962501..$$

Com isso, concluímos que o Triângulo de Sierpinski possui dimensão fractal aproximadamente 1,5849, entre as dimensões 1 e 2.

3.5 Por que utilizar geometria fractal em sala de aula

A Geometria Euclidiana não engloba figuras mais complexas do cotidiano, como as fundamentadas no conceito de fractais. É importante destacar aos estudantes da Educação Básica que não existem apenas figuras geométricas euclidianas com dimensões inteiras, mas que estamos rodeados de diversas “formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores” (Stewart, 1996, p. 12).

Quanto a isto, Barbosa (2005) relata que a utilização da Geometria Fractal em sala de aula beneficia os estudantes de diferentes níveis escolares, sejam do Ensino Fundamental, Médio ou Superior. Pode ser trabalhada como um tema transversal, já que a Geometria Fractal é rica em aplicações e explica muitos objetos presentes na natureza, podendo ser relacionada com diferentes Ciências. No Ensino Fundamental, pode-se utilizar material concreto na montagem de fractais, como um quebra-cabeça, e realizar sua construção gráfica com instrumentos usuais como a régua, o transferidor e o compasso. No Ensino Médio, pode-se trabalhar com funções simples, dimensão fractal, contagem, perímetro, área, volume, progressões geométricas e utilização de recursos computacionais (Barbosa, 2005).

Além disso, Alves (2007) menciona que a Geometria Fractal oportuniza a interdisciplinaridade, por trabalhar com diversas temáticas. Pode-se oportunizar aos estudantes uma interpretação diferente da Matemática, utilizando softwares para gerar imagens e construir fractais, suscitando desta forma o interesse dos estudantes pelas inúmeras surpresas que os fractais escondem.

Conforme Silva (2015, p. 38), a utilização da Geometria Fractal na Educação Básica permite que a prática docente se faça menos rotineira e mais atraente, com atividades diferentes e novas, permitindo uma reflexão maior sobre a Geometria Euclidiana, pois “[...] amplia as discussões de conceitos e resultados que muitas vezes não são trabalhados em classe”.

4 Metodologia

Adotou-se a pesquisa qualitativa, considerando a comunicação do pesquisador em campo como parte explícita da produção de conhecimentos (Flick, 2009, p. 25).

A experiência teve início com a disciplina de Tendências em Educação Matemática do 5º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Caxias do Sul, em 2018. Houve a apresentação de uma proposta de atividade com o objetivo de analisar e discutir criticamente as tendências da Educação Matemática a partir de referenciais teóricos e experimentos práticos, apresentando essas tendências como ferramentas que contribuíssem para os processos de ensino e aprendizagem. A atividade proposta para a turma de licenciandos consistiu em criar e executar uma prática de ensino para os colegas da turma, que envolvesse uma ou mais das tendências em Educação Matemática. Desde então, pensou-se em compreender e realizar o trabalho proposto focado na Geometria Fractal em sala de aula. Escolheu-se então uma proposta voltada para o Ensino Médio.

Primeiramente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, com a finalidade de aprofundar o conhecimento sobre fractais e efetuar a busca por materiais e ideias para utilização em sala de aula. Autores como Boyer (1994), Barbosa (2005), Almeida et al. (2006), Alves (2007), entre outros, foram importantes para a elaboração do desenvolvimento teórico da proposta. Após a realização da pesquisa, iniciou-se o planejamento da prática de ensino com os seguintes objetivos: (a) compreender a história e o conceito de Geometria Fractal; (b) identificar fractais no cotidiano; (c) realizar a construção de fractais a partir de conceitos e instruções; (d) criar fractais no software GeoGebra.

A prática de ensino foi aplicada em 4 períodos de 50 minutos. Ao final da atividade, os estudantes participantes preencheram um formulário de avaliação, relatando sua percepção sobre a atividade desenvolvida. Na próxima seção, apresenta-se o detalhamento dos momentos vivenciados.

5 Resultados e discussões

A prática de ensino desenvolvida foi composta por duas etapas, descritas na sequência textual.

5.1 Construção Manual de fractais

A primeira etapa iniciou com a apresentação para a turma do tema “Geometria Fractal”, mostrando alguns exemplos de aplicações por meio de imagens e alguns conceitos fundamentais. Foi relatado um pouco da história da criação das geometrias não-euclidianas, a partir dos questionamentos do Postulado 5, escrito por Euclides de Alexandria. Após, tratou-se da Geometria Fractal, quando foi passado para os alunos as conceituações de fractais de acordo com Mandelbrot, J. Feder e K. J. Falconer. Além disso, a partir de alguns exemplos as propriedades que caracterizam os fractais foram mostradas e analisadas pela turma. Foram apresentados alguns exemplos de fractais encontrados na natureza como a vitória-régia, o brócolis-romanesco, as árvores, o repolho, a concha marinha, a babosa, os galhos de samambaia, os relâmpagos, entre outros. Ainda nesta etapa, foram exibidos também alguns fractais feitos por matemáticos, como o Conjunto de Cantor e a Curva de Peano.

Na sequência, foram distribuídas folhas de ofício entre os estudantes, nas quais constava a representação do primeiro nível de um fractal. Cada uma recebeu um fractal diferente para construção. Os demais níveis deviam ser construídos a partir de instruções fornecidas para sua realização utilizando régua, esquadro e compasso. Essa etapa foi cuidadosamente pensada para que os estudantes percebessem, de forma indutiva, o processo recursivo característico de um fractal. Na figura 6, observam-se os acadêmicos da Licenciatura em Matemática realizando a atividade proposta.

Figura 6: Construção de fractais com régua, esquadro e compasso



Fonte: Material da pesquisa (2018).

As instruções fornecidas aos estudantes foram as seguintes:

1. Conjunto de Cantor

- a. Nível 0: Construa um segmento de reta.
- b. Nível 1: Divida o segmento em três partes iguais e elimine o segmento central.
- c. Nível 2: Repita a construção do nível 1 em cada segmento resultante do nível 1.
- d. Nível 3: Repita a construção do nível 1 em cada segmento resultante do nível 2.

2. Curva de Kock

- a. Nível 0: Construa um segmento de reta.
- b. Nível 1: Divida o segmento em três segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes. O segmento intermediário deve ser substituído por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (base do triângulo).
- c. Nível 2: Substitua cada um dos novos segmentos pela construção feita no nível 1.

3. Curva de Peano

- a. Nível 0: Construa um segmento de reta.
- b. Nível 1: Substitua por uma curva de nove segmentos de medida igual a $1/3$ do comprimento do segmento inicial. Para isto, divida o segmento de

reta em três partes iguais e, sobre o traço médio, construa um retângulo, formando dois quadrados com lado igual ao traço que lhes deu origem.

- c. Nível 2: Substitua cada segmento obtido no nível 1 por uma curva de nove segmentos.

4. Curva de Hilbert

- a. Nível 1: Construa um quadrado, divida-o em quatro novos quadrados e marque o centro de cada um deles. Gere uma curva com três segmentos consecutivos que possuam extremos nos pontos centrais dos quadrados.
- b. Nível 2: Substitua cada quadrado por quatro novos quadrados e construa a curva da mesma forma da curva iniciadora, conectando cada curva parcial com um segmento.

5. Triângulo de Sierpinski

- a. Nível 0: Construa um triângulo equilátero.
- b. Nível 1: Marque os pontos médios de cada lado do triângulo equilátero e os una, formando quatro triângulos equiláteros menores. Elimine o triângulo central.
- c. Nível 2: Repita o procedimento do nível 1 para cada um dos triângulos não eliminados.
- d. Nível 3: Repita o procedimento do nível 1 para cada um dos triângulos não eliminados.

6. Tapete de Sierpinski

- a. Nível 1: Construa um quadrado e divida-o em nove quadrados congruentes. Elimine o quadrado central.
- b. Nível 2: Repita o procedimento do nível 1 para cada um dos quadrados não eliminados.
- c. Nível 3: Repita o procedimento do nível 1 para cada um dos quadrados não eliminados.

7. Pentagonal de Dürer

- a. Nível 1: Construa um pentágono regular. Dentro deste pentágono, construa outros cinco pentágonos regulares menores de forma que, dois a dois, tenham um vértice em comum. Os ângulos internos dos pentágonos criados devem ser iguais aos ângulos internos do pentágono regular inicial. Elimine os cinco triângulos intermediários e o pentágono central.
- b. Nível 2: Repita o procedimento do nível 1 para cada um dos pentágonos não eliminados.

8. Árvore Pitagórica

- a. Nível 1: Construa um triângulo retângulo cujos catetos e hipotenusa são dados por um terno pitagórico fundamental. Sobre seus catetos e hipotenusa, construa os quadrados respectivos. Elimine o triângulo retângulo.
- b. Nível 2: Construa sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto um novo triângulo retângulo tendo por hipotenusa justamente este lado. Sobre seus catetos, construa os quadrados respectivos. Elimine os triângulos retângulos.
- c. Nível 3: Repita o procedimento do nível 2.

9. Fractal Triminó

- a. Nível 0: Construa um quadrado.
- b. Nível 1: Divida o quadrado em quatro quadrados menores. Elimine o quadrado superior direito.
- c. Nível 2: Repita o procedimento do nível 1 para cada quadrado não eliminado.
- d. Nível 3: Repita o procedimento do nível 1 para cada quadrado não eliminado.

10. Heptaminó em H

- a. Nível 0: Construa um quadrado.

- b. Nível 1: Divida o quadrado em nove quadrados menores. Considere os sete quadrados menores que formam um H. Elimine os demais quadrados.
- c. Nível 2: Repita o procedimento do nível 1 para cada quadrado não eliminado.
- d. Nível 3: Repita o procedimento do nível 1 para cada quadrado não eliminado.

Sobre tal etapa, foram feitos os seguintes questionamentos aos estudantes: 1. As instruções para as construções de cada nível estavam claras? 2. Você gostou dessa atividade? Por quê? 3. Se você fosse aplicar em sala de aula, o que você mudaria? 4. Em sua opinião, o que foi possível compreender a partir desta atividade?

Em geral, as respostas apontaram que as instruções estavam claras. Uma estudante explicitou que em “algumas instruções foi necessário o auxílio das professoras para interpretar”. A atividade foi proposta para que os alunos praticassem a leitura e a interpretação para a construção dos fractais. Em certos momentos, o auxílio para a interpretação foi solicitado, e a prática adotada foi a de orientar os alunos para que estes fizessem a interpretação correta, sem dar a resposta final a eles.

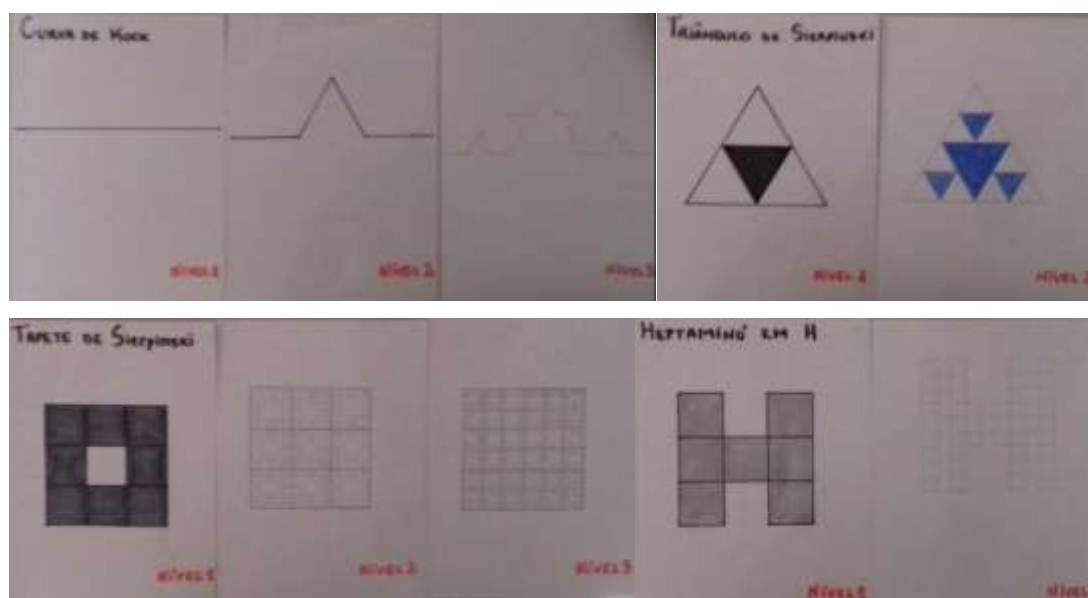
Pelos relatos, percebe-se que a turma gostou da atividade, gerando sugestões – como a utilização de uma folha A4 para cada construção –, o que possibilitou a aplicação de uma melhor escala em cada nível. Além disso, apontaram que “poderiam constar menos níveis”, pois com poucos níveis já é suficiente entender a lógica de construção (o número de níveis já foi reduzido nas instruções apresentadas anteriormente). Também, foi sugerido uma aula interdisciplinar de Matemática com a disciplina de Artes, visto que tais construções permitem a criação de composições artísticas.

Com relação ao questionamento “Em sua opinião, o que foi possível compreender a partir desta atividade?”, os estudantes colocaram que aprenderam o conceito de fractal, a ideia da construção, aplicações de fractais em nosso cotidiano, e que podem ser utilizados em diferentes áreas do

conhecimento. Apontaram também a ideia das suas divisões e subdivisões e que “estamos rodeados de fractais e compreender isso é de extrema importância”. Com os relatos percebemos que a turma compreendeu o conceito de fractais e o seu processo de construção.

Na figura 7, é possível visualizar algumas das construções realizadas pela turma com a utilização da régua, do esquadro e do compasso.

Figura 7: Construção manual da Curva de Koch (esquerda superior), do Triângulo de Sierpinski (direita superior), do Tapete de Sierpinski (esquerda inferior) e do Heptaminó em H (direita inferior)

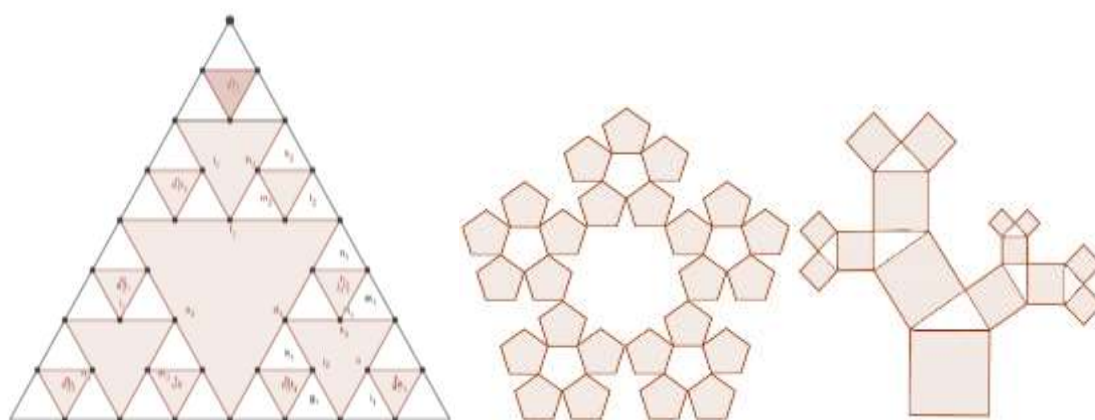


Fonte: Material da pesquisa (2018).

5.2 Construção de fractais no GeoGebra

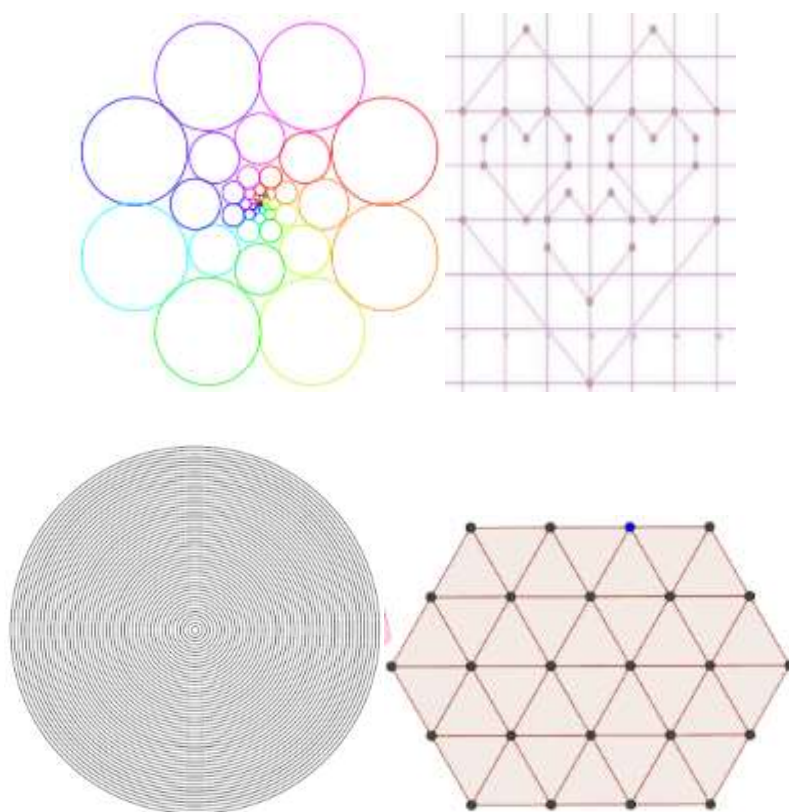
Para o segundo momento utilizou-se o software GeoGebra. Foi proposta a construção livre de fractais. Alguns estudantes optaram por reproduzir algum dos fractais discutidos em aula (Figura 8) e outros criaram estruturas contendo repetições (Figura 9). A seguir, segue as produções dos alunos realizadas em um período de aula de 50 minutos.

Figura 8: Construção do Triângulo de Sierpinski (esquerda), da Pentagonal de Dürer (centro) e da Árvore Pitagórica (direita) no GeoGebra



Fonte: Material da pesquisa (2018).

Figura 9: Construção livre de fractal no GeoGebra



Fonte: Material da pesquisa (2018).

Ao final dessa etapa, os questionamentos lançados foram os seguintes: 1. Esta atividade lhe ajudou na compreensão da conceituação de fractal? 2. Você gostou dessa atividade? Por quê? 3. Se você fosse aplicar essa atividade em sala

de aula, o que você mudaria? 4. Em sua opinião, seria possível aplicar esta atividade na Educação Básica?

Todos os alunos responderam positivamente ao primeiro questionamento. Com relação ao gosto pela atividade, responderam ter gostado por ser mais dinâmica, por envolver meios digitais, por envolver Matemática e beleza. Os estudantes – em sua maioria – estavam preocupados com o domínio dos comandos do GeoGebra, e se saberiam usá-los na Educação Básica com tal fim. Sobre isso, ressalta-se que é necessário um momento com a turma para que se tenham um primeiro contato com o GeoGebra, para identificar os principais comandos e as ferramentas disponíveis. Com relação à possibilidade de aplicação da atividade, os estudantes apontaram a necessidade da escola ter um laboratório de informática disponível, com acesso à internet, visto que o processo de construção livre de fractais exigiu, além do software, pesquisa sobre possibilidades de construção.

6 Considerações finais

A inserção da Geometria Fractal na Educação Básica ou Superior é uma possibilidade que oportuniza a ampliação dos conceitos já existentes sobre a Geometria. Nem tudo o que vemos é modelado pela Geometria Euclidiana, e isto deve ser de conhecimento dos estudantes, como as células do corpo humano, o brócolis-romanesco, a concha marinha, e os relâmpagos.

Com a atividade realizada, foi possível estudar sobre um tema não curricular que abre espaço para interpretações matemáticas sobre o mundo que nos cerca. Após uma compreensão sobre o conceito de construção de fractais e suas dimensões, foi possível elaborar uma prática com o intuito de fazer a mesma construção com colegas da licenciatura, fomentando o interesse pelo tema e, conseqüentemente, seu tratamento na futura profissão. Por sua simplicidade, a prática desenvolvida é passível de ser feita em poucas aulas do Ensino Médio, preferencialmente em dois dias distintos. Ademais, acrescenta-se a possibilidade de um relato escrito sobre as construções livres realizadas, fazendo com que os estudantes apresentem as “regras” que os levaram a seus fractais. Isto

possibilitará uma discussão sobre as possibilidades de construção e a avaliação sobre o entendimento do conceito de fractais.

Referências

ADAMES, Márcio Rostirolla; DALPIAZ, Marcos Roberto. **Investigando fractais no ensino básico**: uma proposta paradidática. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.

ALMEIDA, Elder Cesar de; SANTOS, Thiago Fontes. Uma breve introdução ao conjunto de cantor. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 1, p. 60-65, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/pp/index.php/rmat/article/view/1132/893>. Acesso em: 20 mar. 2020.

ALMEIDA, Theodoro Becker de; MARTINELLI, Rodiane Ouriques; RODRIGUES, Virgínia Maria; SILVA, Ana Maria Marques da. **Fractais no ensino fundamental**: explorando essa nova geometria. [Rio Grande do Sul: s. n.], 2006. Disponível em: http://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/fractais_20no_20ensino_20fundamental.pdf. Acesso em: 21 mar. 2018.

ALVES, Célia Maria Filipe Santos Jordão. **Fractais**: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. 2007. 324 p. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/20939623/Fractais-Conceitos-Basicos-RepresentacoesGraficas-e-Aplicacoes-ao-Ensino-nao-Universitario#scribd>. Acesso em: 21 mar. 2018.

ASSIS, Thiago Albuquerque de; MIRANDA, José Garcia Vivas; MOTA, Fernando de Brito; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mário Castro de. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 2304-1-2304-10, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172008000200005>. Acesso em: 20 mar. 2020.

BARBOSA, Ruy M. **Descobrendo a geometria fractal**: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARBOSA, Cairo Dias. **Geometria fractal**: contextualização e aplicação no ensino de sequências e progressões geométricas. 2014. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Marabá, 2014.

BONGIOVANNI, Vincenzo; JAHN, Ana Paula. De Euclides às geometrias não euclidianas. **UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Espanha, n. 22, p. 37-51, jun. 2010.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

DARIO, Douglas Francisco. **Geometrias não euclidianas**: elíptica e hiperbólica no Ensino Médio. 55 f. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2014.

FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

KALEFF, Ana Maria M. R. Geometrias não-euclidianas na educação básica (sic): utopia ou possibilidade? ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10., Salvador, 7-9 jul. 2010. **Anais [...]**. Ilhéus, BA: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1-17.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo Nunes. **Geometria fractal e aplicações**. 2006. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006. Disponível em: <https://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2020.

SEB. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. v. 2.

SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. 20. ed. Curitiba: Editora Universitária Champagnat, 1997.

SILVA, Kauê M. **Fractais e algumas aplicações ao ensino**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, Armando Paulo da; YONEZAWA, Wilson Massashiro. A geometria euclidiana e as geometrias não-euclidiana numa visão epistemológica segundo a filosofia de Bachelard. **REPPE**: Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino, Cornélio Procópio, v. 1, n. 1, p. 141-156, 2017.

SIQUEIRA, Rodrigo. Grupo Fractarte. In: INTRODUÇÃO AOS FRACTAIS. [S. l.], 18 abr. 2005. Disponível em: <https://www.fractarte.com.br/artigos.php>. Acesso em: 21 mar. 2018.

STEWART, Ian. **Os números da natureza**: a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.