http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

Produções criativas de matrizes e de transformações geométricas com metodologias ativas

Creative productions of matrices and geometric transformations with active methodologies

Greiton Toledo de Azevedo[1]
Marcus Vinícius Maltempi[2]

Resumo

Nosso objetivo é compreender o processo de aprendizagem de matrizes e suas transformações geométricas: Reflexão, Translação, Escala e Rotação. Norteados pelas Metodologias Ativas de Aprendizagem, a produção de dados foi realizada no curso de Redes em Computadores Integrado ao Ensino Médio, com os alunos do 2º ano do Instituto Federal Goiano, em Ipameri/GO. O cenário formativo de aprendizagem foi criado como lugar para vivenciar experiências em matemática como modo de vida e não como ação mecânica e formalismos, que tendem a minar a forma de pensar, inventar e criar do próprio aluno em relação à aplicação de matrizes e as suas transformações geométricas. Os dados foram produzidos em sala de aula, usando malha quadriculada, GeoGebra e quadro-branco, e foram analisados a partir de elementos do Construcionismo identificados nas atividades mobilizadas. Os resultados obtidos indicam os conhecimentos construídos a partir da mobilização de ideias matemáticas e da produção-argumentação-compreensão do conteúdo de matrizes e transformações, evidenciando a importância da aprendizagem ativa e problematizada-contextual pelos alunos.

Palavras-chave: Construcionismo. Matriz. Aprendizagem matemática. Metodologia ativa.

1 Introdução

Renomados teóricos na Educação e Educação Matemática já evidenciavam preocupações quanto à forma de ensinar e aprender no século 20. Entre eles, destacamos Seymour Papert (1994), que reforçava os princípios das metodologias ativas de aprendizagem a partir da pedagogia de projetos, de modo a valorizar a experiência do aluno em seu processo formativo, evidenciando a conexão entre os diferentes saberes sem se reduzir à transmissão de

[1] Doutorando em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista (Unesp). Docente do Instituto Federal Goiano, Ipameri, GO - Brasil. e-mail: greiton.azevedo@ifgoiano.edu.br.
[2] Livre-Docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, SP – Brasil. e-mail: marcus.maltempi@unesp.br.

conhecimento. No Brasil, Paulo Freire (1981) também criticou a abordagem descontextualizada do currículo, propondo a formação do aluno a partir de experiências de exploração e investigação, para além do conteúdo fracionado.

Neste sentido, tendo em vista a realidade da sala de aula, propusemos um conjunto de atividades “mão na massa” que fosse além do conteúdo conceitual e procedimental, buscando por um processo formativo atual, ativo e criativo-argumentativo no estudo de matrizes e transformações geométricas. As produções dessas matrizes, junto aos alunos do 2º ano em Redes de Computadores Integrado ao Ensino Médio (EM), do Instituto Federal Goiano (IF-Goiano), em Ipameri/GO, buscou contribuir com o processo de aprendizagem, despertar o protagonismo e a criatividade dos alunos pela matemática.

Tal busca pauta-se nas ideias em torno das Metodologias Ativas de Aprendizagem (MAA), que oferecem oportunidade para revigorar e revalidar a tradição construcionista da Educação (RESNICK, 2017) a partir da argumentação-reflexão e do pensar-sobre-o-próprio-pensar, que carrega características do Construcionismo (PAPERT, 2008) e privilegia as ideias da Aprendizagem Criativa (RESNICK, 2017). Desta forma, este trabalho propõe-se a compreender o processo de aprendizagem de matemática do aluno do EM a partir da produção de Matrizes e suas Transformações Geométricas.

Evidenciamos, no primeiro momento, em fragmento-recortes, a formação contextual e ativo-engajada do aluno, pautando-se no Construcionismo (PAPERT, 2008; AZEVEDO, 2017; AZEVEDO *et al.* 2018, 2019; MALTEMPI, 2012). No segundo momento, destacamos as produções criativas das matrizes e suas transformações geométricas desenvolvidas pelos alunos, ressaltando as ideias específicas e gerais da matemática subjacentes a cada uma delas.

2 Matrizes e suas transformações geométricas

O trabalho realizado com a produção de matrizes associadas às transformações geométricas, que passa por uma série de etapas, vai além de conceitos isolados e rígidos. É uma proposta que não se resume ao conteúdo:

possibilita o questionamento, a reflexão e o trabalho colaborativo criativo-científico. Os conteúdos podem estar estrategicamente amalgamados às competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de modo a incentivar os alunos a: interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano; identificar transformações isométricas; e produzir ampliações e reduções de figuras.

As atividades aliadas à MAA buscam favorecer a interpretação e compreensão de matrizes e suas operações e transformações geométricas. Cabe ressaltar que, historicamente, a concepção de matriz surgiu depois das noções de sistemas lineares, determinantes, transformações lineares e formas quadráticas. O assunto "matriz" foi anunciado pelo matemático britânico James Joseph Sylvester (1814-1897), em 1850, em um artigo publicado no *Philosophical Magazine* (SYLVESTER, 1850b), voltado a uma situação-problema da Geometria. As suas operações surgiram depois, sendo apresentadas pelo estudioso Arthur Cayley (1821-1895). As definições apresentadas por estes matemáticos se mantiveram e são comumente exploradas em sala de aula e encontram-se nos documentos oficiais da Educação Básica.

Discordando de reduzir o estudo de matrizes aos processos meramente procedural e técnico-formal ou mecânico, o nosso entendimento é que, ao trabalhar com este assunto na Educação Básica, a organização dos processos de ensino e aprendizagem a partir de MAA, em sala de aula, deve exigir nova postura tanto do professor quanto do aluno frente à construção de conhecimento matemático, em um ambiente de diálogo, pesquisa e desenvolvimento de ideias exploratório-criativas; um processo visto como produção ativa que permita ao estudante desenvolver o seu potencial criativo e a sua capacidade de verbalizar e de enfrentar ativamente diferentes situações-problema, em vez de apenas receber informações prontas a serem consumidas ou reproduzidas.

Em vez de definição-exemplo-exercícios-respostas, as ações de aprendizagem podem valorizar a compreensão-invenção-resultados quanto ao conteúdo de matrizes e suas transformações geométricas. A ideia aqui não é a de focar no conteúdo em si mesmo, mas de oportunizar um processo formativo maior, tendo como base as características do saber e fazer matematicamente, entre as quais se destacam: desenvolver ideias; lidar com o imprevisto; propor soluções para um problema encaminhado e estabelecer relações conceituais.

É nesse sentido que lançamos luz à compreensão da produção de matrizes e suas transformações geométricas. Um trabalho didático-pedagógico e investigativo-reflexivo que oferece não só novas estratégias de ensino, mas que possibilite ao aluno ter formação mais ativa e menos isolada no que se refere ao conteúdo explorado em sala de aula a partir de MAA.

3 Metodologias Ativas de Aprendizagem

As Metodologias Ativas de Aprendizagem (MAA) buscam promover o processo formativo do aluno, privilegiando a sua autonomia, investigação e a sua criatividade ao construir conhecimentos científicos e empíricos sem se reduzir ao compasso do treinamento de conteúdos curriculares. É um processo biunívoco de aprendizagem no qual tanto os alunos como o professor interpretam o seu meio, levantam hipóteses, analisam contextos e constroem junto-engajadamente ideias e o conhecimento mobilizado (AZEVEDO, 2017). Algumas iniciativas de diversas partes do mundo procuram tornar o aprendizado mais relevante e atual para os alunos a partir desse tipo de metodologia em seus mais diferentes contextos de aprendizagem associando as ideias do jardim de infância (RESNICK, 2017).

A aprendizagem caracterizada no jardim de infância, que passa pelas mãos e carrega ideias e características das MAA, acaba se associando à ideia de brincadeiras com blocos, atividades para modelar, que dão origem a invenções curiosas e potencialmente criativas. As ações de ensino e aprendizagem podem se originar como possibilidades de descobertas e invenção para o professor e aluno e, portanto, não devem ser deixadas de lado no decorrer de sua trajetória escolar em níveis mais avançados. "Em vez de fazer jardim de infância como o resto da trajetória escolar, nós precisamos fazer o resto da escola (na verdade, o resto da vida) mais como o jardim de infância" (RESNICK, 2017, p. 17, tradução nossa), que favorece a investigação, a curiosidade e a criatividade.

A ideia aqui não é a de reduzir o ensino e a aprendizagem de matemática do EM ao manuseio de materiais concretos, construção de blocos ou até mesmo na manipulação de massinhas. O resgate das concepções do jardim de infância vai além dessa compreensão e se efetiva no fato de oportunizar situações desencadeadoras de invenção e aprendizagem ativa ao aluno de tal modo que ele possa ser capaz de: criar novas ideias em conjunto; estabelecer novas relações do conteúdo; desenvolver projetos de interesse pessoal; e ser capaz de interpretar e propor soluções a problemas encaminhados de forma criativa - ser um pensador criativo. Assim, “[...] o processo de se tornar um pensador Criativo “com C maiúsculo” é em si um processo interativo” (RESNICK, 2017, p. 5, tradução nossa), que conjuga elementos de formação mais ativo-participativa.

Desta forma, olhamos para a criatividade de matrizes à luz das ideias da Aprendizagem Criativa (RESNICK, 2017; AZEVEDO *et al*. 2018), como processo inventivo caracterizado pela imaginação, originalidade e criação-produção de artefatos curiosos, que não obedecem a uma lógica linear de passos prefixados. Assim, o processo de produzir criativamente é uma proposta que impulsiona diferentes experiências “mão na massa”, pautando-se pela insubordinação ao treino do conteúdo e aprendizagem sem sentido em sala de aula.

A hierarquia procedimental conteúdo-exemplo-exercícios é rompida nessa concepção, dando lugar à inquietação e à curiosidade a partir da experimentação do aluno, na qual o processo de aprendizagem ativo passa a ser tão fundamental quanto o seu produto final. Este processo, portanto, não pode ser encarado como ação separada da formação do aluno ou que deve ser encerrado no jardim de infância. É um movimento que pode ser encorajado e consolidado ao longo da trajetória formativa do aluno, evidenciando a relevância das MAA em matemática.

Olhamos às MAA como processo ativo e participativo de aprendizagem do aluno, que não recebe nada pronto nem tampouco mastigado pelo professor, negando-se, portanto, a ideia que um bom caminho para a aprendizagem se reduza ao aperfeiçoamento da mera instrução ou do acúmulo excessivo do ensino. A partir desta interpretação, entendemos que a MAA dialoga fortemente com as ideias preconizadas pelo Construcionismo, referencial teórico que norteia as nossas ações pedagógico-científicas e teórico-filosóficas.

4 Construcionismo

Ainda que os alunos possam apresentar boas notas ou excelentes resultados, muitas vezes não estão preparados para os desafios inesperados que encontram após a formatura, em suas vidas profissionais e em suas vidas pessoais (RESNICK, 2017). Segundo este autor “[...] muitos alunos aprendem a resolver tipos específicos de problemas, mas são incapazes de se adaptar e improvisar em resposta a situações inesperadas que inevitavelmente surgem no mundo em rápida mudança de hoje” (RESNICK, 2017, p. 18, tradução nossa). É nesse sentido que damos enfoque à compreensão da aprendizagem de matrizes e suas transformações geométricas à luz das ideias construcionistas.

O Construcionismo é uma teoria de aprendizagem que considera que o desenvolvimento cognitivo é um processo ativo de construção das estruturas mentais, no qual o conhecimento não pode ser simplesmente transmitido de uma pessoa para outra (PAPERT, 2008; AZEVEDO, 2017, AZEVEDO *et al.*, 2018). “O processo de aprendizado deve ser um processo ativo, em que os aprendizes 'colocam a mão na massa' no desenvolvimento de projetos de forma ativa, em vez de ficarem sentados atentos a fala do professor” (MALTEMPI, 2012, p. 288).

Nenhum conhecimento, o que inclui o de matemática, conforme Lévy (1999, p. 79), “[...] pode ser depositado de maneira incólume na cabeça do aluno de forma a caracterizar uma transmissão direta”. Todo o conhecimento sofre relações na cabeça do aluno, que podem “[...] ser corretas, ricas, perenes ou não dependendo especialmente do trabalho do professor, quando consideramos o ambiente escolar” (MALTEMPI, 2012, p. 3). Concordamos com essas ideias, pois não acreditamos que conhecimento possa ser transmitido, porque não é possível de ser recebido pronto, acabado, sem transformação. Pelo contrário, ele é

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

(re)construído a partir de vivências ocorridas com o meio social, que se mostra permeado pelas múltiplas e complexas interações estabelecidas, carecendo, portanto, ser (re) feito por cada indivíduo.

Desta forma, nosso entendimento quanto à aprendizagem de matemática na visão construcionista, em especial, a partir das MAA em sala, não é vista como ato minimalista de transferência de conhecimento do professor para o aluno. O aluno despoja-se da postura de mero ouvinte para assumir a participação ativa e comprometida com sua aprendizagem. À luz desta compreensão, avançamos à próxima seção, destacando o contexto e o percurso metodológico deste trabalho.

5 O contexto e o percurso metodológico

Tendo assumido o processo de aprendizagem em matemática que privilegia as ideias do Construcionismo amalgamadas às MAA a partir da produção de matrizes e suas transformações geométricas, este trabalho é norteado pelos pressupostos qualitativos de pesquisa, pois busca "[...] atingir aspectos humanos sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de métodos previamente definidos e, portanto, sem ficar presos a quantificadores e aos cálculos recorrentes" (BICUDO, 2006, p. 107).

A pesquisa foi realizada em sala de aula ao longo de três encontros, cada um deles com duração de 140 minutos, com a participação de 25 alunos do EM do IF-Goiano, em Ipameri/GO. Neste artigo trazemos inicialmente a produção criativa de matrizes e suas transformações geométricas e, no segundo momento, evidenciamos dois recortes, Cenários A e B, das duas principais etapas sequenciais desenvolvidas sobre matrizes e suas transformações em sala de aula.

Para registro dos dados, utilizamos diversos instrumentos, como diário de campo (professor), fotografias e filmagens. Utilizaremos recortes-fragmentos dos diálogos-discussões gravados e anotados, bem como faremos uso de [...] para explicitar trecho que se refira à transcrição de fala dos autores. Para a análise dos dados em relação à compreensão do processo da aprendizagem do conteúdo de

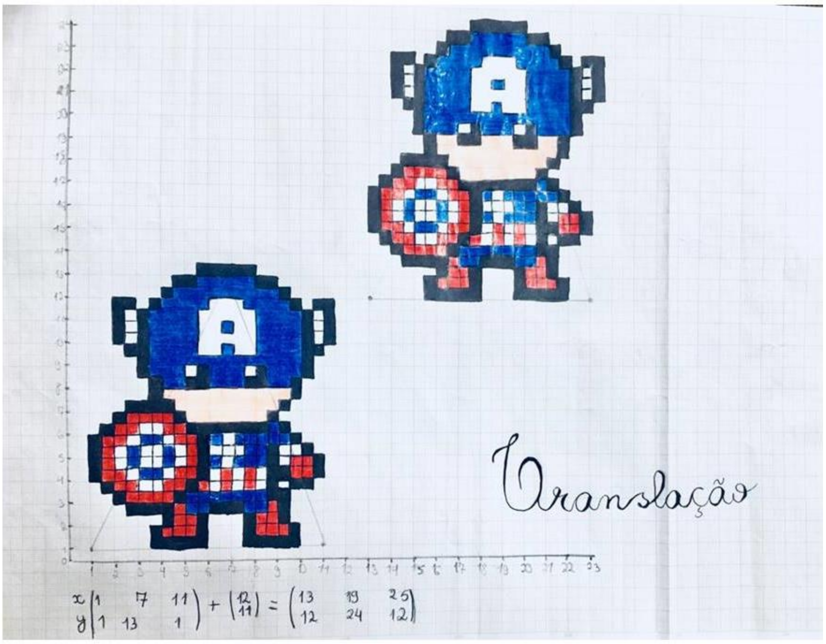
http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

matrizes e suas transformações geométricas, utilizamos as ideias preconizadas pelo Construcionismo, lançando luz às concepções prático-filosóficas das MAA. É buscando a atualização dessa visão construcionista à aprendizagem de matrizes e transformações, que partimos para a próxima seção, na qual apresentamos as produções criativas dos alunos e a parte matemática ali envolvida.

6 Produções criativas de matrizes e suas transformações

Evidenciamos as produções criativas das matrizes e suas transformações geométricas (Translação, Reflexão, Escala, Rotação) desenvolvidas pelos alunos, dando sentido e contexto à aprendizagem de matemática. Nesta seção, exemplificamos quatro modelos de transformações geométricas produzidas pelos alunos no estágio final. A ideia aqui é destacar os trabalhos de transformações produzidos por eles e tecer ideias gerais e específicas de matemática de tais produções para futuros trabalhos a serem realizados em sala de aula.

Matriz Capitão América (**CA)** | Transformação Geométrica | **TRANSLAÇÃO**



O que há por trás do desenho matricial-artístico? Adição de Matrizes e Translações horizontal e vertical

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 1 & 13 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Tranlação} CA' = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 23 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix}$$

A região A sofreu uma translação: $\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 12 unidades à direita ao longo do eixo x
11 unidades para cima ao longo do eixo y

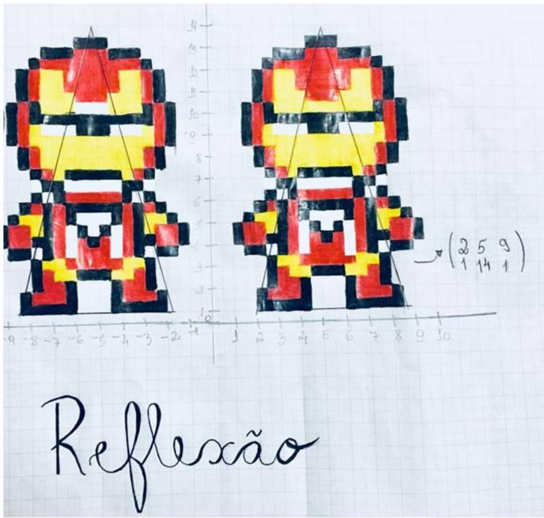
Uma ideia geral do esboço construído pelo grupo de alunos, para transladar um ponto P(x, y) de ***a*** unidades para a direita e ***b*** unidades para cima, efetuamos a adição de matrizes:

$Em\ símbolos, temos$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$, x e y representam a matriz original dada (triangular).

Obs.: o valor a_{13} = 25 da matriz CA' (na imagem acima) foi corrigido para a_{13} = 23 ao longo das discussões em sala de aula. Decidimos manter o valor original apresentado pelos alunos antes da correção, evidenciando um processo ativo de idas e vindas, que conjuga erros e aprendizagem a partir deles.

Figura 1: Matriz de Translação: Capitão América
Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Matriz Homem de Ferro (**HF**) | Transformação Geométrica | **REFLEXÃO**



O que há por trás do desenho matricial-artístico? Multiplicação de Matrizes e reflexão em relação ao eixo y

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

Vértices do polígono HF e HF’, respectivamente: (-2,1), (-5, 14), (-9, 1) e (2,1), (5,14), (9,1).

A região A (associada à figura) sofreu uma reflexão em relação em ao eixo y dando origem à região A’

A reflexão que leva HF em HF’ é indicada por:

$$HF = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -9 \\ 1 & 14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Reflexão} HF' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 1 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos obter a matriz de HF’ multiplicando a Matriz de HF pela Matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -9 \\ 1 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 1 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo genérico, para obter a reflexão em relação ao eixo y de uma figura cuja matriz associada dada, por exemplo, por: $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix}$, basta efetuar o produto:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c & -d & -e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix}$$

Obs.: o grupo de alunos escolheu a reflexão em y, porém, é possível fazer a reflexão em x.

Figura 2: Matriz de Reflexão: Homem de Ferro
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Matriz Tartaruga Ninja (**T**) | Transformação Geométrica | **ESCALA**

O que há por trás do desenho matricial-artístico? Ampliação e redução proporcional de figuras

Seja uma mudança de escala de um ponto P(x, y) em relação, usando um fator mulplicativo $T_{x,}$ para coordenada x e um fator mulplicativo T_y para a coordenada y. Assim, temos A= $\begin{pmatrix} Tx & 0 \\ 0 & Ty \end{pmatrix}$ e a matriz B = $\binom{x}{y}$, assim sendo, devemos ter: B' = A x B. No registro acima dos alunos, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 10{,}5 & 19 \\ 1 & 25 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 21 & 38 \\ 2 & 50 & 2 \end{pmatrix}$$

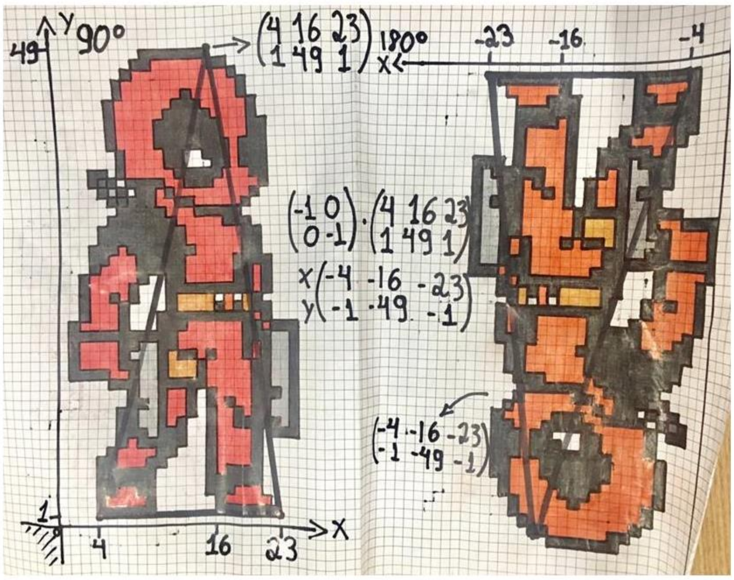
Observa-se que o grupo usou o primeiro quadrante para expressar intuitivamente a escala do desenho, fazendo uso de diferentes representações simbólicas pessoais do conteúdo. Desta forma, valores ficaram positivos. Percebe-se também que o desenho foi aumentado 100%. Assim sendo, os valores de $T_{x} = T_y = 2$. Isso se justifica, pois, aumentar 100% nas direções dos eixos O_x e O_{y}, é o mesmo que multiplicar por 2, da mesma forma que aumentar 70% é multiplicar por 1,7, etc. Vale ressaltar que a matriz original associada sempre representará 100%= 100/100 = 1.

De modo genérico, podemos escrever uma matriz de escala:

$\begin{pmatrix} Tx & 0 \\ 0 & Ty \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ f & g & h \end{pmatrix}$, sendo a matriz associada dada $\begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \end{pmatrix}$.

Figura 3: Matriz de Escala: Tartaruga Ninja
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

Matriz Dead Pool (**DP**) | Transformação Geométrica | **ROTAÇÃO**



O que há por trás do desenho matricial-artístico? Rotação, ângulos e funções trigonométricas.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

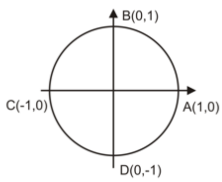
A figura DP (à esquerda) sofre uma rotação de 180º no sentido anti-horário, dando origem à figura DP’ (à direita). As matrizes DP e DP’ são respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 23 \\ 1 & 49 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -4 & -16 & 23 \\ -1 & -49 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontramos DP’ multiplicando a matriz original pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que é correspondente a:

$\begin{pmatrix} \cos 180º & -\,sen\ 180º \\ sen\ 180º & \cos 180º \end{pmatrix}$, ou seja: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 16 & 23 \\ 1 & 49 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -16 & 23 \\ -1 & -49 & 1 \end{pmatrix}$.

Para dedução dos ângulos, os alunos foram incentivados a analisar o círculo trigonométrico:



De modo geral, para se obter a rotação de β grau no sentido anti-horário em torno da origem (0,0) de uma figura na qual a matriz original é dada, por exemplo, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, basta efetuar o produto, a saber:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\,sen\ \beta \\ sen\ \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Figura 4: Matriz de Escala: Dead Pool
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

7 Cenário A: Matriz associada à Transformação (Escala)

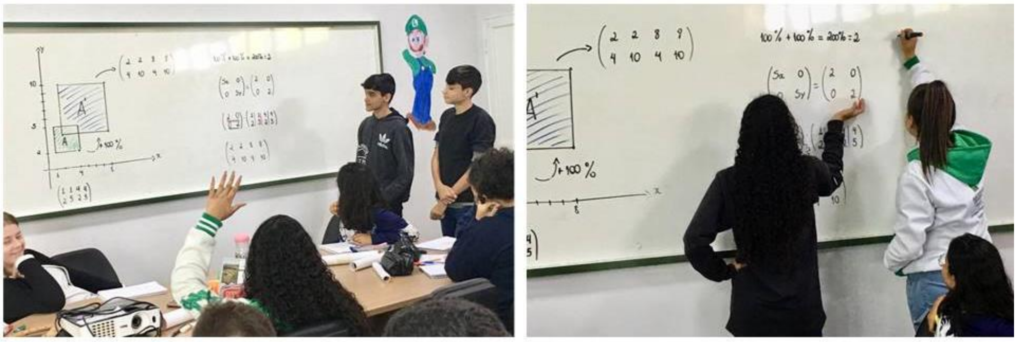
A sala foi organizada para ser um ambiente de invenções, questionamentos e deduções-lógicas e intuitivas de matemática. Os alunos foram separados em trios e quartetos para pensar-junto e desenvolver as ações propostas. A ideia inicial era de relacionar as matrizes ao plano cartesiano a partir de figuras geométricas simples, como triângulos, quadrados, etc. Encorajamos os alunos a pensar na estrutura da matriz associada aos pontos P(x, y) no Plano cartesiano e suas operações, tendo como apoio o uso do GeoGebra, quadro-branco e papéis-quadriculados, que auxiliaram nas produções alinhado-simétricas das figuras.

Em sequência, exploramos as transformações (Translação, Reflexão, Escala e Rotação) de um objeto qualquer (quadrado, triângulo, losango, trapézio, etc.) no quadro. Decidimos não seguir a explicação receita-bolo do tipo: faça isso

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

e depois faça aquilo. Pelo contrário, os alunos foram incentivados a pensar, argumentar e analisar as transformações geométricas das figuras associadas as suas matrizes correspondentes a partir de questões norteadoras. Uma dessas ações didático-investigativas pode ser observada no fragmento-recorte a seguir.

Produção-argumentação e participação-ativa dos alunos nas aulas de matemática



Prof.: Como podemos aumentar a região desse quadrado em 100% associado à matriz? Pense um pouco: O que deve acontecer com as suas dimensões e os valores dos elementos dessa nova matriz? [discussão]
Guímel: [Alguns minutos depois] Nosso grupo pensou algumas ideias para a matriz A. Percebemos que o coeficiente da matriz geratriz será igual a 2, pois já temos 100% da matriz dada [Matriz A] e mais 100% de aumento, então, deve ser igual a 200%.
[Registro do Quadro-Branco, A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 8 \\ 4 & 10 & 4 & 10 \end{pmatrix}$].

Taynara: Os elementos dobram de valor. Mas, o legal é que a sua área não dobra, quadruplica.
Prof.: Refletindo sobre a fala da Taynara: O que seria essa nova área associada à matriz?
José G: (...) a área do quadrado verde cabe exatamente quatro vezes na área do quadrado azul. As "dimensões do desenho" são duplicadas, assim como os elementos da matriz. [Explica-discute-argumenta com os colegas a matriz gerada, B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: matriz geradora].

Guímel: Então por isso que os nossos cálculos estavam errados [Refaz o produto das Matrizes] [Ideias intuitivas à formalização: $B \times A = A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 8 \\ 4 & 10 & 4 & 10 \end{pmatrix}$].

Figura 5: Discussão-compreensão da Matriz associada à transformação Escala
Fonte: Dados da pesquisa, 2019.

A fala "[...] Nosso grupo pensou [...] percebemos que o coeficiente [...] então, deve ser igual a 200% [...]", - evidencia a relação de ideias geradas pelos alunos quanto à produção-reflexão-argumentação da matriz associada à transformação de escala, relacionando conteúdos específicos de porcentagem. A ideia aqui não é a de unir termos de matemática e reduzir ao conteúdo procedimental do tipo: faça isso e repita 50 vezes depois. Pelo contrário, a essência, que se apresenta, neste caso, está na forma de conduzir o processo de testar hipóteses para forjar ideias ativamente pelos alunos (PAPERT, 2008).

Há um contexto de argumentação ativa, que ocorre processo de busca, de erros e até mesmo de dificuldades superadas ao longo do trabalho, como evidencia os excertos: “Os elementos dobram de valor. Mas, o legal é que [registra no quadro] a sua área não dobra, quadruplica” [e] “As “dimensões do desenho” são duplicadas, assim como os elementos da matriz [explica a matriz gerada]”. Observa-se o processo ativo para compreensão do conteúdo que se amplia durante a argumentação e produção dos alunos. Tal processo, segundo as ideias construcionistas, acaba estruturando-se pela mobilização de ideias a partir da compreensão de significados de matemática à formalização de termos específicos relacionados (AZEVEDO *et al*, 2018).

A compreensão do conteúdo como forma de aprendizagem é um processo dinâmico e marcado por passos não lineares e nem pré-definidos, constituindo-se por idas e vindas, discussão-reflexões, bem como por avanços e retrocessos de ideias. Tal processo pode ser observado no seguinte excerto: “então por isso que os nossos cálculos estavam errados (...) a matriz geradora tem de ser (...)”. O processo aqui não é conhecido a priori e nem dado de forma verticalizada pelo professor, há um esforço de engajamento de ambos os atores para a procura da resposta, exigindo deles uma postura ativa em sala tanto para mobilização de significados quanto para a compreensão, no caso da matriz geradora.

A proposta de quebrar com a aula de conceito-exemplos e listas de exercícios, à luz do Construcionismo, não significa diminuir a responsabilidade do professor e deixar o aprendiz fazer o que quiser. Na verdade, é um movimento que pressupõe a parceria de ambos durante o processo de produção e argumentação de significados, de ideias e contextos. Essa busca pela mudança tem por finalidade, “[...] descentralizar o foco excessivo do conteúdo procedimental matemático, que muitas vezes se reduz aos aspectos mecânicos e, ao mesmo tempo, privilegiar espaços associados à investigação, à exploração, à participação e à construção de ideias coletivas” (AZEVEDO, 2017, p. 36).

Este cenário apresenta a construção de significados pelos alunos sendo mediados pelo professor, que promove um espaço de discussão e registros favoráveis à compreensão da matriz escalar relacionando-a a uma figura proporcional. O processo não se resume a explicação do professor, enquanto todo restante se mostra inerte, ou seja, não se limitou ao domínio de técnicas, memorização mecânica e atividades receituário-fechadas. O aluno pode buscar significado pela pesquisa, discussão e debate ao lado do professor, até porque, mesmo quando parece estarmos transmitindo com sucesso informações dizendo-as, “se pudéssemos ver os processos cerebrais em funcionamento, observaríamos que nosso interlocutor está reconstruindo uma versão pessoal das informações que pensamos estar transferindo" (PAPERT, 2008, p. 137).

Para além do fragmento-recorte apresentado, a seção subsequente evidencia a segunda etapa de argumentação e produção ativa pelos alunos, relacionando as ideias de matrizes, transformações e seus cálculos com as produções (desenhos criativos) no papel quadriculado. Tal etapa constituiu-se como espaço de pesquisa e de orientação quanto às produções já encaminhadas pelos grupos. Assim sendo, avançamos à próxima seção para entender melhor esse espaço.

8 Cenário B: Matriz associada à Transformação (Rotação)

Na segunda etapa, os alunos foram incentivados a apresentar e argumentar as ideias de matrizes associadas as transformação geométricas à luz da produção de: rascunhos de figuras em forma de pixels na malha quadriculada. Os alunos escolheram os desenhos que gostariam de desenvolver e, a partir disso, estruturávamos, em conjunto, a matriz de parametrização ao desenho, tendo por base cálculos correspondentes das matrizes na malha quadriculada.

O desafio, para os alunos, não foi o cálculo, mas as proporções que deveriam ser respeitadas para a elaboração de cada desenho. Um processo que demandou esforço, dedicação e reflexão-criativa tanto na produção das formas quanto na pintura. Reforçamos que as ações didático-pedagógicas baseavam-se na perspectiva de valorizar o gosto pessoal dos alunos pelos personagens e, principalmente, de incentivar o trabalho em equipe da produção criativa. Trazemos um recorte-fragmento a seguir, exemplificando um desses momentos.

Produção-argumentação e participação-ativa dos alunos nas aulas de matemática

Gabriela: Estamos gostando de projetar as figuras no papel. Mas, já erramos mil vezes [som de risos].
Matheus: Está dando certo. O nosso grupo tem feito alguns desenhos de base. (...) “Rotacionar”, aqui, é virar a figura a partir da rotação da matriz. Por exemplo, o quadrante 1 [plano cartesiano] é a posição da figura base, se virarmos 90 graus para esquerda [sentido anti-horário] ela vai ficar “deitada” no segundo quadrante [mostra a figura]. Se forem 180 graus, a figura vai para o terceiro quadrante e fica “de cabeça para baixo” [invertida], e assim sucessivamente.
Gabriela: Como já exploramos as figuras mais simples, estamos usando a mesma ideia de ângulo aqui (...).
Matheus: Ah, por isso que usamos a função de trigonometria na matriz geradora, porque tem de fazer girar.
Professor: (...) Precisamos construir uma matriz geradora de tal modo que envolva esses conceitos. Como vocês estão pensando para usar a matriz geratriz para fazer os desenhos girarem?
Gabriela: Percebemos que as projeções estão melhores de serem visualizadas, usando os ângulos notáveis do círculo [trigonométrico], daí, fizemos as correções para fazer os desenhos no quadriculado.

Figura 6 – Discussão-compreensão da Matriz associada à transformação Rotação
Fonte: a pesquisa, 2019.

A fala “(...) estamos gostando de projetar as figuras no papel. Mas, já erramos mil vezes”, demonstra o engajamento da aluna quanto à produção criativa da matriz na malha quadriculada. Há um produto de significado pessoal, que é explorado, refletido e discutido pela aluna ao compartilhá-lo. Muito além de aprender fazendo, nesse contexto, o Construcionismo acrescenta: “(...) aprende-se melhor ainda quando se gosta, pensa, discute e conversa sobre o que se faz" (MALTEMPI, 2005, p. 3).

As ideias matemática aparecem como pano de fundo da construção engajado-participativa das matrizes pelo grupo. Uma dessas ideias intuitivas aparece na argumentação-explicação-produção do aluno: “(...) Rotacionar, aqui, é virar a figura a partir da rotação da matriz. Por exemplo, o quadrante 1 é a posição da figura base, se virarmos 90 graus para esquerda, ela vai ficar “deitada” no segundo quadrante (...)”. Existe um conceito formal envolvido por trás da fala do aluno: existe uma matriz geradora A de tal modo que se multiplicá-la pela matriz B [matriz base], o resultado será a Matriz resultante [C= A x B].

Não foi o professor explicando na sala de aula ou o aluno copiando e repetindo tudo que estava ali no quadro-branco. Ambos desenvolviam juntos. O papel do professor estava ali, no lugar certo: o do lado do aluno, ajudando-o e encorajando-o a pensar em novos caminhos, a corrigir os erros a analisar novas possibilidades para resolver um problema encaminhado da intuição-exploração à compreensão-formalização. À luz deste entendimento, o Construcionismo preconiza que não se pode atingir a aprendizagem apenas reduzindo-se ao ensino, enquanto, porém, todo o restante se mostra inalterado em sala de aula.

A atitude construcionista no ensino "[...] não é, em absoluto, dispensável por ser minimalista - a meta é ensinar de forma a produzir a maior aprendizagem [ativa] a partir do mínimo de instrução" (PAPERT, 2008, p. 134). O conhecimento mobilizado se mostra presente na discussão-compartilhada entre os alunos, valorizando as ideias intuitivas até os conceitos mais específicos, como se observa no excerto: “por isso que usamos a função de trigonometria na matriz geradora, porque tem de fazer girar”. Entendemos que há uma associação entre ideias intuitivas e ideias mais gerais, como no caso da matriz de referência associada à trigonometria. Há um processo que prestigia o intuitivo, que passa pela discussão-argumentação até à formalização do conteúdo mobilizado.

Trabalhar com formalismos e signos que não possuem nexos de significados para o aluno, pode comprometer o processo de aprendizagem dele. Entendemos que o importante não é só o ponto de chegada, nem somente o ponto de partida, mas um todo complexo de sua construção-significado. Para esse entendimento, recuperamos a fala da aluna que diz: “(...) as projeções ficaram melhor de serem visualizadas (...) fizemos as correções (...)”. O processo

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X07132019100

aqui é aliado à aprendizagem, pois ao surgir erros ao longo da atividade ela pôde refletir sobre ele e teve a chance de propor estratégias para corrigi-lo.

Nesse sentido, as atividades que acontecem nesse processo de discussão, que leva em conta as MAA, partem da premissa que essas ideias/hipóteses transitórias de aprendizagem, levantadas pelos alunos, se constituem um fator importante no processo de criação da matriz e da produção de significados das transformações. Isso porque a depuração de ideias possibilita ao estudante não só refletir sobre o desenho construído ou o cálculo realizado, mas também o permite pensar nos erros e a partir deles avançar no processo de compreensão.

Percebemos, porém, que não é só dominar os conceitos estudados, tampouco explorá-los durante a construção de uma matriz na malha quadriculada, mas a partir deles ter a oportunidade de criar novas coisas, ter a oportunidade de discutir sobre elas com outras pessoas, favorecendo assim "[...] a troca de ideias e opiniões que podem auxiliar e impulsionar o aprendiz a desenvolver projetos mais complexos que envolvam novos conhecimentos" (PAPERT, 1994, p. 127). E é justamente essa troca de ideias e a assimilação de novos conceitos que carregaram um sentido prático de estar ali fazendo-criando e aprendendo.

9 Palavras finais

Buscamos compreender o processo de aprendizagem de matrizes e suas transformações geométricas à luz do Construcionismo e das Metodologias Ativas de Aprendizagem, destacando o estudo das produções criativas das matrizes (CA, HF, TN, DP). A interação com os estudantes e os discursos apresentados evidenciam um processo contextualizado e não linear de ideias fixas, que exige do estudante e, ao mesmo tempo, permite que eles sigam seus interesses.

O propósito de construir personagens em forma de matrizes não era deixar o processo de aprendizagem “bonitinho” ou superficial em termos conceituais e procedimentais. Mas, objetivamos oportunizar aos alunos a compreensão das ideias matemáticas específicas sobre matrizes e suas transformações, dando-lhes a chance de escolher e inventar desenhos de seu interesse pessoal e estabelecer relações entre o conteúdo matemático, com autonomia e criatividade ao longo das MAA.

O contexto foi dado pelos estudantes ao associarem personagens de seu interesse ao estudo de matriz, favorecendo o engajamento deles nas diversas ações criadas e envolvidas no estudo. A dinâmica das aulas inibia a passividade dos estudantes, desafiando-os a tomar e controlar suas decisões, a compartilhá-las e, nesse processo, as avaliarem. O estudo de matriz, portanto, não se resumia a procedimentos e dava sentido para que a comunicação, a colaboração e a criatividade ocorressem.

Sendo assim, esperamos contribuir com a prática docente de professores de matemática da Educação Básica que desejam seguir abordagens ativas, valorizando aspectos da compreensão-invenção-resultados em vez de atividades do tipo receita ou do modelo definição-exemplo-exercícios do conteúdo. Os diálogos e as matrizes apresentadas podem inspirar esses professores a valorizar a formação de seus alunos, para além do ato de fazer uma prova e, por consequência, conseguir uma boa nota. É um trabalho que busca focar mais na aprendizagem do que no conhecimento como fim em si mesmo.

Agradecimentos

Aos queridos alunos do 2º ano do IF-Goiano, Campus Avançado Ipameri, pela dedicação contínua nas aulas e nos projetos de matemática. Ao Antonio Netto Junior pela revisão do texto.

Referências

AZEVEDO, Greiton Toledo de. **Construção de conhecimento matemático a partir da produção de jogos digitais em um ambiente construcionista de aprendizagem**: possibilidades e desafios. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, 2017.

AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius; RIBEIRO, José Pedro Machado; LYRA, Gene Maria Vieira. Produção de Games nas Aulas de Matemática: Por que não? **Revista Acta Scientiae**, Canoas (RS), v. 20, n. 5, p. 950-966, 2018.

AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius; LYRA-SILVA, Gene Maria Vieira. Processo formativo do aluno em matemática: jogos digitais e tratamento de

Parkinson. **Zetetiké** (On Line), Campinhas (SP), v. 26, p. 569-585, 2018.

AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius.; LYRA, Gene Maria Vieira. Computacional Thinking and Active Learning in Mathematics as a contribution to the treatment of Parkinson's disease. In: **Science and Mathematics Education in The 21st Century**. Braga, Portugal: University of Minho, 2019.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a Abordagem Fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2006. p. 100-118.

FREIRE, P. (1981). **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Novas Tecnologias e Construção de Conhecimento: Reflexões e perspectivas. *In*: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Porto, **Anais** [...] Porto: CIBEM, 2005.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1999.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani.; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2012. p. 287-307.

PAPERT, Seymour. **A máquina das Crianças**: repensando a escola na era informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

PAPERT, Seymour. Instrucionismo versus Construcionismo. In: PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

RESNICK, Mitchel. **Lifelong Kindergarten**: cultivating Creativity through projects, passion, peers and play. 1. ed. Cambridge, Ma: MIT Press, 2017.

SYLVESTER, James Joseph. (1851c). On the Relation between the Minor Determinants of Linearly Equivalent Quadratic Functions. In: BAKER, H. F. 1904. **The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester**. Cambridge: University Press, 1904. v. 1. p. 241-250.