http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

As justificações matemáticas de alunos do 5.º ano na validação de uma conjetura no estudo da igualdade de triângulos

5th grade students' mathematical justifications when validating a conjecture in the study of the congruence of triangles

Marisa Gregório[1]
Hélia Oliveira[2]

Resumo

Este artigo tem como objetivo compreender as justificações matemáticas de alunos portugueses, do 5.º ano, na validação de uma conjetura sobre propriedades de triângulos, no contexto de uma experiência de ensino que privilegiou uma abordagem de ensino exploratório. A metodologia de pesquisa é de natureza qualitativa, com a recolha de dados das produções escritas dos alunos em que estes procuram validar ou refutar uma conjetura e de alguns momentos de discussão coletiva. A análise das justificações dos alunos adotou um referencial baseado em Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998), com três níveis. Os resultados mostram que as justificações de conjeturas dos alunos situam-se maioritariamente no nível 2 do modelo adotado, ou seja, baseiam-se em observações percetivas com indicação aleatória de alguns casos. O estudo destaca ainda as discussões coletivas como espaço de coconstrução da validação pelo grupo turma contribuindo para uma progressiva apropriação do processo de justificação matemática.

Palavras-chave: Raciocínio matemático. Conjeturar. Justificação.

1 Introdução*

O raciocínio matemático (RM) é a base do sucesso dos alunos, tanto na compreensão da Matemática, como na sua utilização eficaz em situações do quotidiano e, por isso, o seu desenvolvimento surge como um aspeto central da educação matemática (HENRIQUES; PONTE, 2014). Desde há algum tempo, não

[1] Mestre em Educação (Didática da Matemática), aluna do Doutoramento em Educação (Didática da Matemática) no Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, professora no Agrupamento de Escolas Rainha Dona Leonor, Lisboa, Portugal – marisaspg@gmail.com.
[2] Doutora em Educação (Didática da Matemática), pela Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Professora Auxiliar no Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal – hmoliveira@ie.ulisboa.pt.
* Este artigo foi escrito na grafia da Língua Portuguesa, de Portugal, segundo o Acordo Ortográfico.

só a investigação, mas também orientações curriculares em diferentes países têm dado ênfase ao raciocínio matemático no ensino da Matemática, como é o caso dos *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2008). Nesse documento o RM é visto, a par da demonstração, como uma forma poderosa de desenvolver e expressar intuições sobre fenómenos e que envolve a formulação e investigação de conjeturas e a validação de argumentos e provas matemáticas. Esta validação assume a forma de justificação que, numa fase inicial, poderá passar por estratégias de tentativa-erro ou experimentação não sistematizada de casos particulares, evoluindo para utilização de contraexemplos ou exemplos genéricos até um nível de desenvolvimento em que os alunos já são capazes de produzir justificações baseadas em argumentos dedutivos (NCTM, 2008).

Não obstante a relevância atribuída ao desenvolvimento do RM, tem sido evidente que não é dada a atenção necessária à capacidade de argumentar e justificar, em particular no ensino básico, uma vez que com frequência os professores consideram que tais capacidades não estão ao alcance dos alunos desse nível de ensino (STYLIANIDES; STYLIANIDES; SHILLING-TRAINA, 2013). Por exemplo, no contexto brasileiro, Nasser (2017) refere que, apesar de os documentos curriculares recomendarem que sejam proporcionadas atividades aos alunos que possibilitem o desenvolvimento da construção de argumentos lógicos para provar e demonstrar a validade ou refutação de afirmações matemáticas, tal prática ainda está pouco presente na sala de aula.

Em Portugal, a importância do RM ficou reconhecida, em 2007, com o Programa de Matemática do Ensino Básico. Neste documento o RM é visto como uma capacidade fundamental, que envolve a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Neste sentido, o RM envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos temas específicos da Matemática (ME, 2007).

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

Bieda e Lepak (2012) evocam a necessidade de criar oportunidades aos alunos do ensino básico de estabelecerem uma ponte entre o raciocínio informal de natureza indutiva e o raciocínio formal (dedutivo). Para progredirmos na compreensão de como atingir este objetivo, é fundamental conhecer melhor os processos de raciocínio dos alunos e, consequentemente, o tipo de justificação que estes são capazes de desenvolver. É por isso nosso objetivo compreender as justificações matemáticas que são produzidas por alunos no contexto da discussão da validade de uma conjetura sobre propriedades de triângulos, numa turma do 5.º ano do ensino básico português[3].

2 Referencial teórico

2.1. Raciocínio matemático

O raciocínio matemático é reconhecido como um dos aspetos fundamentais da matemática (NCTM, 2008), no entanto, da revisão da literatura sobre o tema, nem sempre é claro o seu significado. O recente estudo de Jeannotte e Kieran (2017) mostra que não existe um consenso na literatura da educação matemática sobre realmente em que consiste o RM. Para alguns autores o foco é a clarificação dos aspetos estruturais, ou seja, a forma na qual o raciocínio é expresso (dedutivo, indutivo ou abdutivo), outros enfatizam os aspetos processuais, especificando os componentes do RM (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Outros ainda associam aos seus componentes à perspetiva “commognitive” (SFARD, 2012) que engloba o pensamento (cognição individual) e a comunicação (interpessoal) e as características socioculturais deste processo às atividades discursivas de sala de aula (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Neste artigo iremos debruçar-nos sobre alguns dos aspetos processuais do RM e, neste sentido, começamos por retomar a perspetiva de Lannin, Ellis e Elliot (2011) para os quais este é “um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (p. 10). A esta perspetiva

[3] Corresponde ao 5º ano do sistema educativo brasileiro.

estão associadas práticas de ensino que exprimem expectativas de que os alunos são capazes de raciocinar de forma abstrata e quantitativa, construir argumentos viáveis, criticar o raciocínio dos outros e de descobrir e fazer uso da estrutura de um raciocínio e ainda de descobrir e expressar relações e regularidades de um raciocínio que se repete. Ainda segundo estes autores, este processo inicia-se, frequentemente, com o desenvolvimento de uma conjetura, seguida do confronto dos vários argumentos que conduzem à sua justificação ou refutação.

No presente estudo, temos também em conta, os contributos da perspetiva social, onde a cultura de sala de aula e todos os seus intervenientes (alunos e professores) desempenham um papel fundamental na coconstrução e disseminação do RM, fazendo emergir a importância da atividade discursiva em sala de aula (SFARD, 2012). De acordo com esta perspetiva, Jeannotte e Kieran (2017) definem RM como um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir afirmações matemáticas de outras afirmações matemáticas. Neste processo a atividade discursiva consiste no que os alunos dizem, o modo como dizem (as suas entoações) e como o fazem (os seus gestos e desenhos). Assim sendo, o RM é entendido como um processo "commmognitive" que é metadiscursivo, isto é, que origina narrativas sobre objetos ou relações através da exploração das relações entre os objetos.

Jeannotte e Kieran (2017) sintetizaram os aspetos convergentes do RM e propõem um modelo conceitual para a matemática escolar que abrange cinco processos relacionados com a identificação de semelhanças e diferenças; são eles, os processos de generalização, conjetura, identificação de um padrão, comparação e classificação e três processos de validação: a justificação, a prova e a prova formal. Por fim, a exemplificação também é compreendida entre os aspetos do RM, como sendo um processo que suporta os outros oito.

Em Portugal, nos atuais documentos curriculares (DGE, 2018), nomeadamente nos que definem as aprendizagens essenciais, é indicado que para o 5.º ano é expectável que os alunos consigam: construir explicações e justificações matemáticas e raciocínios lógicos, incluindo o recurso a exemplos e contraexemplos; exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, com precisão e rigor; justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.

2.2. Conjeturar

A conjetura constitui uma importante via para a descoberta matemática e, desde muito cedo, os alunos podem aprender a formular e testar conjeturas, desde que para isso lhes sejam dadas oportunidades e contextos de aprendizagem enriquecedores e envolventes (NCTM, 2008).

Segundo Harel e Sowder (1998), “uma conjetura é uma observação feita por uma pessoa que tem dúvidas sobre a sua veracidade” (p. 241) e, seguindo esta linha, para Sylianides (2007) uma conjectura é definida como uma hipótese fundamentada sobre uma relação matemática geral baseada em evidências incompletas. Esta definição enfatiza o caráter não arbitrário da conjetura e denota a necessidade de outra ação que produza aceitação ou rejeição. Esta necessidade também está implícita em Lannin, Ellis e Elliot (2011), para os quais por *conjeturar* entende-se raciocinar sobre relações matemáticas para formular afirmações que presumivelmente são pensadas como verdadeiras, mas que, no entanto, se desconhece a sua veracidade. Para estes autores o processo de conjeturar é basilar para o RM, na medida que requer a verificação ou refutação das afirmações produzidas: “Ao invés de mostrar aos alunos que algo que eles já assumem ser verdade é de facto verdadeiro, conjecturar, devido à sua natureza provisória, cria uma necessidade de raciocínio matemático na sala de aula de matemática”. (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.16).

Este entendimento vai ao encontro do modelo conceptual de RM de Jeannotte e Kieran (2017), no qual “conjeturar, consiste no processo que infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistémico plausível, provável” (p. 10) e que tem potencial para a justificação matemática. Na prática letiva é importante perceber que o propósito das tarefas relacionadas com o processo de conjeturar, não se pode limitar ao objetivo de encorajar a formulação de conjeturas, mas sim de criar um contexto no qual as conjeturas fomentem a produção de justificações matemáticas.

2.3. Justificar

De acordo com o modelo do processo de raciocínio matemático apresentado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já apreendidas e a refutação matemática diz respeito à corroboração da falsidade da afirmação. Tanto a justificação como a refutação envolvem avaliar a validade dos argumentos. Esta definição reconhece a validação de uma justificativa matemática como um componente crítico e crucial do processo do RM com implicações para a prática letiva, já que cabe ao professor, em última instância, avaliar a validade das justificações e refutações dos alunos. Estes autores valorizam a análise de exemplos de justificações válidas que contenham falhas, dado que permitem identificar os erros típicos que os alunos fazem ao tentar fornecer uma justificação.

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017), justificar consiste no processo de procura de dados e garantias que permitam suportar a mudança do valor epistémico de uma narrativa e é suportada pelo discurso da comunidade no qual não é exigida uma estrutura dedutiva. Seguindo esta linha de pensamento, para o propósito deste estudo, iremos utilizar o termo *justificação* como um argumento que garante (ou refuta) a veracidade de uma afirmação e que usa formas matemáticas de raciocínio aceites como universais na comunidade da sala de aula (grupo turma).

O foco dado à comunidade de sala de aula advém da metodologia de ensino e aprendizagem implementado nesta experiência de ensino e que se assume como uma metodologia de ensino exploratório. Por isso, interessam não só os modos de argumentação que são válidos e conhecidos, mas também que estão ao alcance conceptual dessa comunidade de sala de aula. Consequentemente, embora esta definição exclua como justificação matemática argumentos tais como “foi o que a professora disse”, ou “está assim no livro”, não exclui como justificação matemática os argumentos que já foram estabelecidos pelo grupo turma como, por exemplo, "já tínhamos provado noutra tarefa" ou "foi a conjetura do António que já provámos anteriormente" (STAPLES; BARTLO; THANHEISER, 2012).

3 Experiência de ensino

Um elemento fundamental de contexto de ensino exploratório são as tarefas. Não só pelo conteúdo, mas também pela forma que são apresentadas e conduzidas. Se, por um lado, as tarefas deverão potencializar oportunidades de aprendizagem aos alunos e promover a interação entre pares, por outro, cabe ao professor estabelecer e alimentar um ambiente que encoraje os alunos a pensar, questionar, formular conjeturas, experimentar várias abordagens de resolução, a construir argumentos e a contra-argumentar (NCTM, 2008).

Baxter e Williams (2010) propõem a designação «ensino orientado para o discurso» (*discourse-oriented teaching*) para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através do discurso entre os alunos. Os mesmos autores descrevem uma estrutura projetada para criar ambientes de sala de aula nos quais os alunos podem construir significados a partir do discurso matemático: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Numa cultura de sala de aula que pressupõe o estabelecimento de normas sociais, os alunos são não só encorajados a explicitar as suas justificações, mas também a compreender e apreciar as justificações dos colegas.

Stein e Smith (2011) reforçam a importância das discussões coletivas, nas quais o professor assume um papel muito importante no desenvolvimento e construção do sentido pessoal e coletivo das ideias matemáticas exploradas na sala de aula. Ou seja, através das discussões coletivas, o professor deverá ajudar o discurso matemático dos alunos, tornando o seu pensamento público para que possam construir e avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

A experiência de ensino, de onde emergiu o presente estudo, adotou a metodologia de ensino exploratório e decorreu durante o ano letivo 2017/2018, numa turma do 5.º ano de uma escola básica do ensino público do centro de Lisboa, de que a professora de Matemática é a primeira autora deste artigo. A turma é constituída por 30 alunos, 13 rapazes e 17 raparigas, cuja média de idades é 10 anos. O modelo de aula desenvolvido desde o início da experiência de ensino procurou respeitar os princípios do ensino exploratório (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013). As aulas contemplavam vários momentos, nos quais eram desenvolvidas tarefas individuais, tarefas a pares e tarefas em pequenos grupos de três a quatro alunos. Com exceção dos momentos de trabalho individual caraterizado por rotinas de cálculo e questões de aula, as tarefas eram organizadas em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos (pares ou grupos), discussão coletiva e sistematização das aprendizagens (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013).

A situação apresentada neste artigo refere-se à igualdade de triângulos que se insere no tópico das Propriedades dos Triângulos do Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013). Já tinham sido trabalhados nas aulas a construção de triângulos dados os comprimentos dos lados, «critério LLL de igualdade de triângulos»; dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado «critério LAL de igualdade de triângulos» e dado o comprimento de um lado e as amplitudes dos ângulos adjacentes a esse lado «critério ALA de igualdade de triângulos» e a desigualdade triangular. O termo *conjetura* já tinha sido anteriormente introduzido pela professora e os alunos tiveram oportunidade de experimentar o processo de formulação de conjeturas no domínio dos Números e Operações.

4 Metodologia do estudo

A metodologia do estudo é de natureza qualitativa (Creswell, 2003). Os dados foram recolhidos numa das aulas da experiência de ensino que ocorreu no início do 3.º período letivo, e resultam das produções escritas de sete alunos na resolução de uma tarefa e da sua discussão em grande grupo.

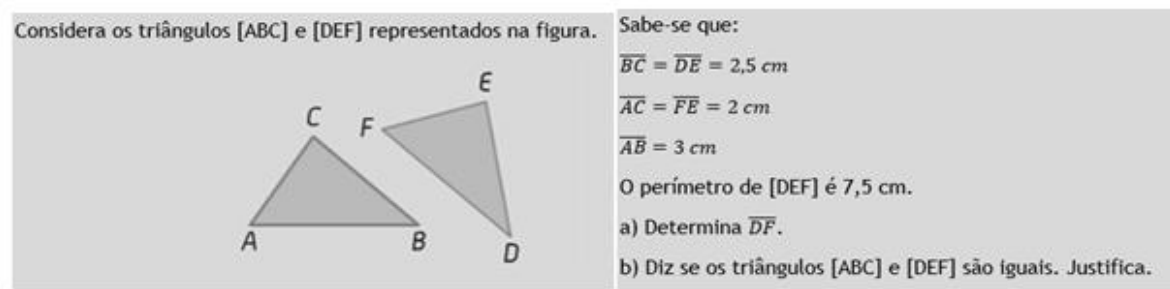
Para analisar as justificações destes alunos, no contexto do processo validação de uma conjetura falsa, recorremos a um quadro de análise baseado em Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998), adaptando à situação de refutação de uma conjetura, e em que são considerados três níveis. No nível 1 (*autoridade externa*), o aluno apresenta uma justificação baseada num elemento considerado por si de autoridade, que pode ser o professor, um colega ou o manual escolar. Este primeiro nível de justificação não é considerado neste estudo como sendo uma justificação matemática, na medida em que assenta num processo de raciocínio matemático. No nível 2 (*empirismo*), o aluno apresenta uma justificação baseada em observações percetivas, mostrando um desenho ou fazendo gestos, ou indicando alguns casos para os quais considera a conjetura ser falsa, sem verificar se se aplicam adequadamente à situação concreta. No nível 3 (*experiência crucial*), o aluno apresenta uma justificação baseada num exemplo cuidadosamente selecionado, revelando intencionalidade na sua escolha.

5 Resultados

5.1 A conjetura da Mariana

A aula começou com a discussão de uma tarefa (Figura 1) que tinha sido solicitada pela professora como tarefa extra-aula. Dos 30 alunos que compõem a turma, 27 estavam presentes e apenas dois não tinham realizado a tarefa. Após a verificação do trabalho realizado pelos alunos, a professora selecionou dois alunos para apresentar a sua resolução no quadro: um iria apresentar a resolução da alínea a) e o outro a alínea b). À medida que a resolução era feita no quadro, os restantes alunos da turma eram convidados, pela professora, a comentar a resolução dos colegas.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021


Considera os triângulos [ABC] e [DEF] representados na figura.

Sabe-se que:

$\overline{BC} = \overline{DE} = 2,5\ cm$

$\overline{AC} = \overline{FE} = 2\ cm$

$\overline{AB} = 3\ cm$

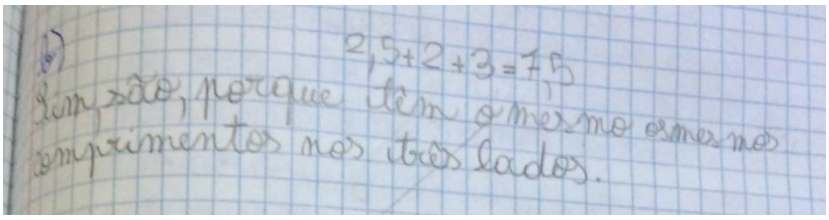
O perímetro de [DEF] é 7,5 cm.

a) Determina $\overline{DF}$.

b) Diz se os triângulos [ABC] e [DEF] são iguais. Justifica.

Figura 1- Tarefa extra-aula.
Fonte: Manual de Matemática 5.º ano. Espaço 5. Porto Editora.

A resolução da questão da alínea a), não obteve grande reação por parte dos alunos que mostraram concordar com o que foi apresentado pelo colega. No caso da alínea b), contudo, a professora observou que a aluna (Mariana) que foi apresentar a sua resposta, não respondeu cabalmente à questão, uma vez que apresentou uma justificação matemática incompleta. Notou também que a aluna registou um cálculo numérico que correspondia à soma das medidas dos comprimentos dos lados do triângulo que não seria necessário para responder à questão (Figura 2).



Leia-se “2,5+2+3 Sim, são, porque têm o mesmo os mesmos comprimentos nos três lados”.
Figura 2 – Resolução da Mariana.
Fonte: Do estudo.

A professora procurou então perceber por que motivo a aluna tinha indicado o perímetro do triângulo, questionando-a acerca disso:

Professora: O que representa a operação que apresentas na tua resposta?
Mariana: O perímetro do triângulo.
Professora: E porque achaste importante apresentá-lo na tua resposta?
Mariana: Porque assim vê-se logo que os triângulos são iguais.
Professora: Como assim?
Mariana: Os dois triângulos têm o mesmo perímetro, por isso são iguais.

A professora reconheceu que esta afirmação da aluna tinha grande potencial para promover a discussão coletiva de justificações e como tal desafia-os a pronunciarem-se sobre a sua veracidade:

> **Professora:** Então quer dizer que se quaisquer dois triângulos tiverem o mesmo perímetro eles são iguais?
> **Mariana:** Sim! (a expressão facial da aluna mostra que considera a ideia óbvia).
> **Professora:** O que é que vocês acham da conjetura da Mariana?
> Perante a pergunta da professora, os alunos agitam-se: uns dizem que concordam com a Mariana, outros acham que a afirmação não é verdadeira. A professora procura colocar ordem na discussão e levar os alunos a pensarem mais cuidadosamente sobre a conjetura e aproveita este momento para estimular a justificação escrita. Para tal, procura garantir que todos os alunos entenderam a conjetura sobre a qual se devem debruçar, pedindo que a sua autora a enuncie de novo:
> **Professora:** Calma! Vamos lá então escrever no caderno a conjetura da Mariana. Diz lá Mariana, como é mesmo a tua conjetura?
> **Mariana:** Se dois triângulos tiverem o mesmo perímetro, são iguais.

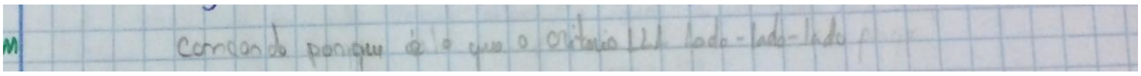
Os alunos começaram, individualmente, a produzir as suas justificações no caderno e, embora alguns tenham solicitado a ajuda da professora, esta procurou que a sua intervenção não condicionasse o raciocínio dos alunos. A professora circulou pela sala verificando as respostas dos alunos e registou-as fotograficamente para poderem depois ser partilhadas no grande grupo. As respostas dos alunos a este desafio, lançado pela professora, bem como a discussão coletiva realizada em torno delas, são analisadas na secção seguinte.

4.2. As justificações dos alunos

Embora, inicialmente, quando a conjetura foi apresentada, se tenham ouvido várias vozes a concordar com a mesma, quando analisadas as respostas escritas dos alunos, verifica-se que apenas um aluno, o Artur, par da Mariana, afirmou que esta era verdadeira (Figura 3). O facto de a Mariana ser reconhecida pela turma como uma aluna de sucesso na disciplina de Matemática, poderá ter condicionado as respostas orais dos alunos quando questionados pela professora acerca da

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

veracidade da conjetura. O único aluno que mantem a sua concordância com a Mariana evoca na sua justificação uma propriedade estudada nas aulas, mas que por si só não sustenta a veracidade da conjetura.



Leia-se “Concordo, porque é o critério LLL, lado-lado-lado”.
Figura 3 - Resolução do Artur.
Fonte: Do estudo.

Na sua resolução, o Artur parece fixar-se apenas no facto de os três lados de cada triângulo terem o mesmo comprimento, sem pensar propriamente na conjetura a validar. A sua preocupação parece residir na necessidade de apresentar uma propriedade estudada referente à igualdade de triângulos, achando que com esse argumento valida a conjetura. Quando solicitado pela professora a explicar a sua resposta, apresenta uma justificação com base numa autoridade externa, recordando que já tinha estudado o caso LLL da igualdade de triângulos e responde com o recíproco da conjetura, o que é apontado por um outro aluno:

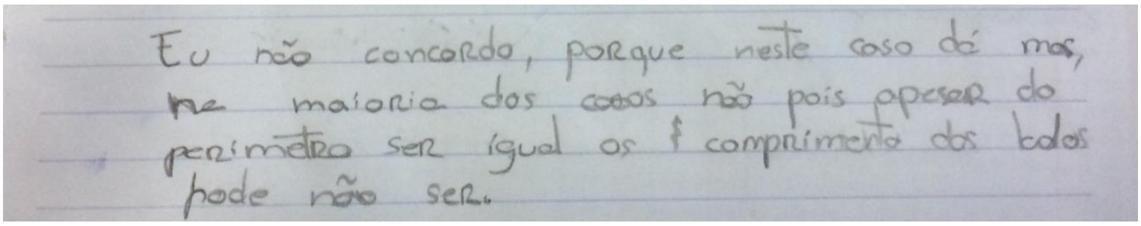
Professora: Artur, queres explicar melhor a tua resposta?
Artur: Se têm os lados iguais, vão ter o mesmo perímetro. Nós estudamos, é o caso LLL.
Professora: Mas de que forma é que isso valida a conjetura da Mariana?
Xavier: Isso é o contrário do que a Mariana disse. Claro que é óbvio.
Professora: O que é que é óbvio?
Xavier: Se os triângulos têm os lados iguais claro que vão ter o mesmo perímetro. A questão não é essa. A Mariana disse o contrário, se dois triângulos têm o mesmo perímetro são sempre iguais e isso é mentira, nem sempre [é].
Artur: Mas neste caso é!
Professora: Sim neste caso sim, mas será que funciona sempre? Será que sempre que dois triângulos tenham o mesmo perímetro eles são iguais? Este é que é o desafio.
Artur: Sempre não sei…

O Artur parece estar ainda a analisar os dados iniciais, centrando-se no caso concreto dos dois triângulos da tarefa, enquanto o Xavier não só mostra um

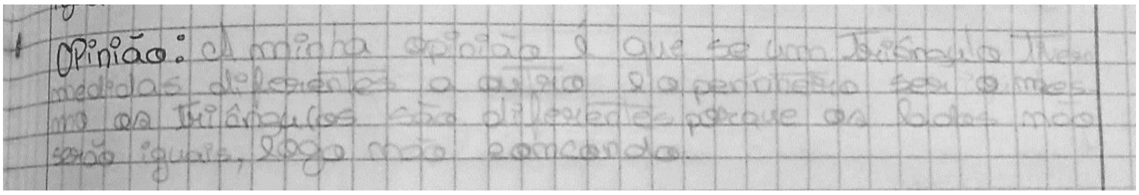
http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

entendimento claro da conjetura em discussão como é capaz de perceber que a justificação apresentada pelo Artur é o recíproco dessa conjetura.

Nas seguintes resoluções (Figuras 4 e 5), as alunas evidenciam justificações que poderemos classificar como estando no nível do *empirismo*, pois apresentam um argumento de natureza percetual, ou seja, é como se mentalmente as alunas estivessem a visualizar um objeto que refuta a conjetura, mas não mostram a viabilidade da sua construção.



Leia-se "Eu não concordo, porque neste caso dá, mas na maioria dos casos não, pois apesar dos perímetros serem iguais os comprimentos dos lados podem não ser."
Figura 4 - Resolução da Benedita.
Fonte: Do estudo.



Leia-se "A minha opinião é que se um triângulo tiver medidas diferentes a outro e o perímetro for o mesmo, os triângulos são diferentes porque os lados não são iguais, logo não concordo."
Figura 5 – Resolução da Carlota.
Fonte: Do estudo.

Benedita regista uma justificação que parece basear-se em observações percetivas, sem nunca as concretizar, nem mesmo quando a apresenta oralmente à turma. Já a justificação da Carlota, embora também se baseie na intuição, durante a discussão coletiva, quando esta intervém, dá a entender que percebe que existem outras possibilidades de comprimentos diferentes dos quais poderão resultar um perímetro igual, sem que os triângulos sejam iguais, como se pode observar no diálogo seguinte:

Benedita: Há vários casos possíveis. Podemos… por exemplo… há várias formas de obter soma 7,5.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

Professora: Por exemplo…

A Benedita fica a pensar, mostrando dificuldade em apresentar um exemplo e é interpelada pela Carlota:

Carlota: Sim, é mais fácil pensar com 10 cm. Podemos ter um triângulo com lados 3, 3, 4 e outro 4, 4, 2.

Dinis: Foi o que eu disse.

Professora: O que é que disseste, Dinis?

Dinis: Dei outro exemplo. Se fizermos 4, 1 e o outro 2,5 também dá 7,5 cm de perímetro e, como tem medidas diferentes, os triângulos são diferentes.

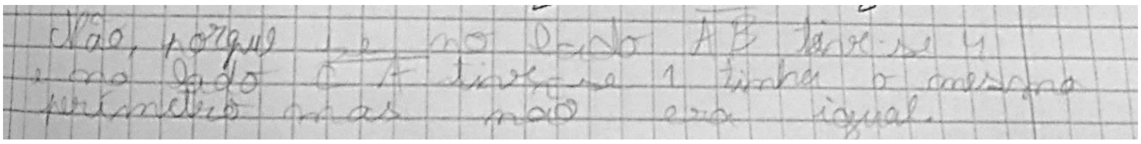
Frederico: Eu também! Só que fiz com perímetro 20, porque é mais fácil de ver.

Professora: Calma. Estou a ver muitos exemplos. Mas será que não nos estamos a esquecer de alguma coisa? Será que basta fazer combinações de três números para obter um triângulo? Isto não pode ser assim, pois não? Não temos de ser mais cuidadosos na escolha dos nossos exemplos? Será que esses exemplos estão a originar triângulos?

Dinis: Pois, mas é só para dar a ideia…

A discussão continuou agora sobre a possibilidade de construção dos triângulos. A professora aproveitou, assim, esta oportunidade para reforçar a desigualdade triangular.

A resolução do Dinis (Figura 6) apresentada de seguida, embora não obedeça à desigualdade triangular, foi considerada uma justificação de nível 2, pois o aluno durante a discussão dá a entender que percebeu que não foi cuidadoso na escolha do exemplo, mas que se o fizesse poderia refutar adequadamente a conjetura.



Leia-se “Não, porque se no lado $\overline{AB}$ tivesse 4 e no outro $\overline{CA}$ tivesse 1, tinha o mesmo perímetro, mas não era igual.”

Figura 6 – Resolução do Dinis.

Fonte: Do estudo.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

Na figura 7 podemos observar que o Eduardo desenha com rigor dois triângulos de perímetro 10,9 cm que apresenta como contraexemplo para refutar a conjetura, no entanto, na realidade desenhou dois triângulos iguais em posições distintas. Esta resolução possibilitou à professora debater a questão da igualdade de figuras que se encontram em diferentes posições que ainda poderia representar uma dificuldade para alguns alunos, nesta fase.

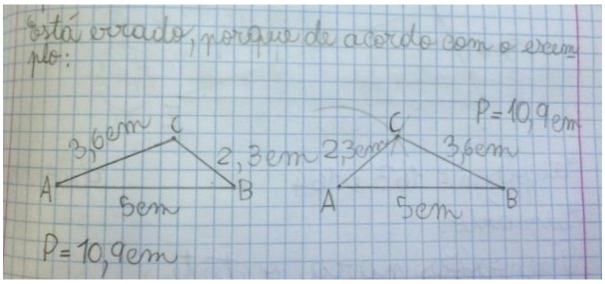


Figura 7 - Resolução do Eduardo.
Fonte: Do estudo.

Durante a discussão coletiva e quando o Eduardo apresenta a sua construção a professora questionou-o no sentido de identificar a razão pela qual afirmava que os triângulos eram diferentes:

> **Eduardo:** Vê-se que são diferentes. Um está para ali e outro para ali. (o aluno aponta para os vértices A do triângulo da esquerda e B do triângulo da direita)
> **Professora:** E isso faz com que sejam diferentes? E o que acontece se tentares sobrepor os dois triângulos?
> **Eurico (par do Eduardo):** São iguais. Basta dobrar a folha para ver.

Para o Eduardo os triângulos eram diferentes, dado que num o lado [AC] mede 3,5 cm e no outro mede 2,3 cm. O aluno inicialmente revela alguma resistência em aceitar que os triângulos são iguais, uma vez que teria de “virar” o triângulo, mas perante a insistência dos colegas acaba por concordar que escolheu mal o exemplo. Ainda assim, o Eduardo mantem a ideia que com outras medidas conseguia arranjar um exemplo que refutasse a conjetura da Mariana, assim a sua justificação enquadra-se no nível 2.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

As resoluções seguintes situam-se no nível 3 – Experiência crucial. Os alunos apresentam uma justificação baseada num exemplo cuidadosamente selecionado, revelando intencionalidade na sua escolha.

Na resolução do Frederico (Figura 8), o aluno não apresenta explicitamente uma resposta à questão, no entanto, desenha com rigor dois triângulos com perímetro 20, usando o compasso e a régua. Destas construções subentende-se que a intenção do aluno é mostrar um contraexemplo para refutar a conjetura, o que é confirmado pela explicação oral que faz a pedido da professora:

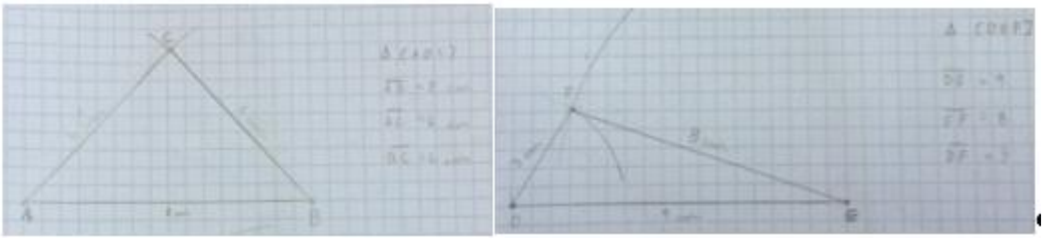


Figura 8 - Resolução do Frederico.
Fonte: Do estudo.

> **Professora:** Vamos ver agora a resolução do Frederico. Tu fizeste algo diferente dos teus colegas.
> **Frederico:** Sim, quer dizer, eu também arranjei medidas diferentes que dessem o mesmo perímetro. Mas construí. As minhas medidas funcionam.

Na sequência da explicação do Frederico, o Guilherme afirma, que as medidas dos comprimentos dos lados que escolheu também permitem construir os triângulos. Na sua resolução (Figura 9), o Guilherme apresenta um esboço de dois triângulos com perímetro 7,5 cm, que apresenta como contraexemplo para refutar a conjetura.

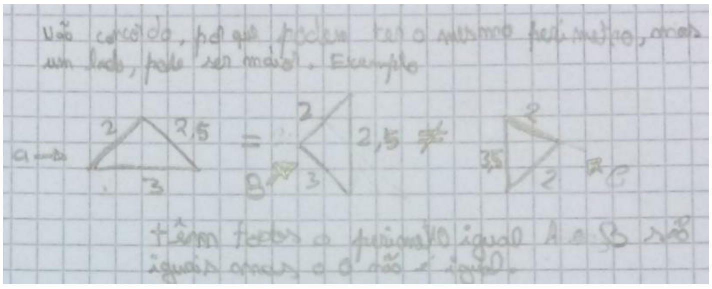


Figura 9 - Resolução do Guilherme.
Fonte: Do estudo.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

Embora a resolução do Guilherme apresente um exemplo cuidadosamente selecionado, que cumpre a desigualdade triangular, o seu esboço revela várias incorreções ao nível na representação dos cumprimentos dos lados dos triângulos. No entanto, aquando da discussão, o aluno mostra compreender a refutação da conjetura da Mariana e admite que foi pouco rigoroso na construção geométrica do contraexemplo.

6 Considerações finais

Neste estudo propusemo-nos compreender as justificações matemáticas que são produzidas por alunos de uma turma do 5.º ano no contexto da discussão da validade de uma conjetura sobre propriedades de triângulos. Ao adotar o modelo conceitual de RM de Jeannotte e Kieran (2017), a análise realizada mostra que dois aspetos do processo de RM, conjeturar e justificar, são oportunos e apropriados neste nível de ensino. O desafio lançado aos alunos de justificarem a conjetura produzida pela Mariana possibilitou o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático em estreita relação com os conceitos geométricos que estavam a ser trabalhados no momento.

De acordo com o quadro de análise adotado baseado em Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998), concluímos que as justificações enquadram-se maioritariamente no segundo nível, isto é, no empirismo, uma vez que os alunos baseiam-se em observações percetivas, mostrando um desenho, ou indicando alguns casos para os quais consideram a conjetura falsa, sem verificar se estes se aplicam adequadamente à situação concreta. Neste nível as justificações podem ser suportadas por argumentos corretos ou incorretos. Outros dois alunos apresentam justificações que se enquadram no terceiro nível, experiência crucial, ou seja, recorrem a contraexemplos cuidadosamente selecionados que atendem às condições necessárias à construção dos triângulos. Apenas um aluno parece não ter compreendido a conjetura e argumenta no sentido da validação do seu recíproco.

Na discussão em torno desta tarefa, os alunos revelam capacidade de exprimir oralmente ideias matemáticas, contudo, ainda o fazem, por vezes, com pouco rigor e precisão. Nesse momento, alguns alunos sustentam melhor a sua argumentação, acrescentando exemplos concretos que se constituem como contraexemplos para a conjetura em discussão. No entanto, a escolha dos contraexemplos foi um aspeto sensível nas justificações dos alunos, dado que, em alguns casos, parece que estes se focam apenas nas relações numéricas e desconsideram a desigualdade triangular que determina a possibilidade de construção de triângulos com as dimensões por eles indicadas, ou seja, que se constitui como a garantia que suporta a mudança do valor epistémico da conjetura (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). É de salientar que a proposta de validação de uma conjetura, neste contexto, permitiu, por um lado, a mobilização de algumas propriedades e processos geométricos trabalhados nas aulas, tais como a desigualdade triangular, a construção de triângulos e a igualdade de triângulos e, por outro, a identificação de algumas dificuldades relativas à capacidade de visualização espacial, nomeadamente a constância perceptual, e à compreensão dos pressupostos da conjetura.

A análise deste episódio de sala de aula revela, ainda, como as discussões coletivas constituem espaços de coconstrução da validação pelo grupo turma, o que contribui para que os alunos se vão progressivamente apropriando do tipo de argumentação que é requerido numa justificação matemática. Destaca-se também o papel primordial do professor ao incentivar os processos de raciocínio matemático: o que inicialmente parecia ser uma tarefa comum, foi aproveitada pela professora para estimular o raciocínio e comunicação matemática dos alunos, ao exprimirem por escrito e oralmente as suas ideias matemáticas que foram também colocadas sob o escrutínio dos seus colegas.

A proposta de refutação de uma conjetura que pode ser concretizada através da seleção de um contraexemplo escolhido com critério é habitualmente uma forma de argumentação menos exigente quando comparada com a validação da veracidade de uma afirmação, constituindo um contexto apropriado para familiarizar os alunos com estes processos. Como implicação didática é de referir que a formulação de conjeturas falsas e o raciocínio incorreto surgem naturalmente na sala de aula (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), pelo que importa encarar esta situação não como uma fragilidade, mas como uma oportunidade para desencadear os processos de validação no quadro do RM e também de desenvolver mecanismos de persistência e resiliência ao erro. É assim transmitida confiança ao aluno para que possa produzir conjeturas falsas, sem que isso seja constrangedor, já que estas podem constituir um ponto de partida para descobertas matemáticas importantes.

Referências

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics, teachers and children**. London: Hodder and Stoughton, 1998.

BAXTER, J. A.; WILLIAMS, S. Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: Managing the dilemma of telling. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 13, n. 1, p. 7-26, 2010.

BIEDA, N. K.; LEPAK, J. Examples as tools for constructing justifications. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 17, n. 9, p. 520-523, 2012.

CRESWELL, J. W. **Research design:** Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. London: SAGE, 2003.

DGE (2018). **Aprendizagens essenciais – ensino básico**. Disponível em : <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>. Acesso em: 22 set. 2018.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (Eds.). **Research in collegiate mathematics education III**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.

HENRIQUES, A.; PONTE, J. P. As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. **Bolema**, v. 28, n. 48, p. 276-298, 2014.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8.** Reston, VA: NCTM, 2011.

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06122018021

ME. **Programa de Matemática Ensino Básico**. Lisboa: ME, 2007.

MEC. **Programa de Matemática Ensino Básico**. Lisboa: MEC, 2013.

NASSER, L. Visão de licenciandos sobre as justificativas em geometria apresentadas na escola básica. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 6, n. 1, p. 4-22, 2017.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2008.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013.

SFARD, A. Introduction: Developing mathematical discourse - some insights from communicational research. **International Journal of Educational Research**, v. 51-52, p. 1-9, 2012.

STAPLES, M.; BARTLO, J.; THANHEISER, E. Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, n. 4, p. 447-462, 2012.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. **Five practices for orchestrating productive mathematical discussions**. Reston, VA: NCTM, 2011.

STYLIANIDES, A. J. Proof and proving in school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 38, p. 289-321, 2007.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J.; SHILLING-TRAINA, L. N. Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 11, p. 1463-1490, 2013.