http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06112018098

O ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática: explorando o processo de construção de um conjunto de tarefas

The teaching of the field of rational numbers in Prospective Mathematics Teacher Education: exploring the process of constructing a set of tasks

Henrique Rizek Elias[*]

Alessandro Jacques Ribeiro[**]

Angela Marta Pereira das Dores Savioli [***]

Resumo

A preocupação em desenvolver produtos educacionais no contexto da Educação Matemática não precisa se restringir a programas de mestrados profissionais apenas, mas pode, também, se expandir a outros pesquisadores, como é o caso deste trabalho fruto de um doutorado acadêmico. Neste artigo, temos como objetivo apresentar e discutir o processo de construção de um produto educacional, um conjunto de tarefas, para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de formação inicial de professores. A elaboração do produto educacional se deu com base na análise de dados oriundos de livros didáticos, pesquisas acadêmicas e entrevistas com professores da Educação Básica e da Licenciatura em Matemática. Ao apresentar o processo de construção das tarefas, explicitando conflitos e comparações entre os modos de significar os números racionais na Matemática Escolar e os modos de significar os números racionais na Matemática Acadêmica, propondo um modelo plausível para se repensar a formação matemática do (futuro) professor.

Palavras-chave: Educação Matemática. Conjunto de Tarefas. Formação inicial de professores. Corpo dos números racionais.

Abstract

[*] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professor do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Londrina – henriqueelias@utfpr.edu.br

[**] Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC) – alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

[***] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) – angelamarta@uel.br

The concern to develop educational products in the context of Mathematics Education need not be confined to professional master's programs only, but it can also expand to other researchers, as is the case of this work from an academic doctorate. In this paper, we present and discuss the process of constructing an educational product, a set of tasks, for teaching the field of rational numbers for prospective mathematics teacher education. The elaboration of the educational product was based on data analyses from textbooks, academic research and interviews with elementary and secondary teachers and prospective mathematics teacher education teachers. In presenting the task-building process, explaining conflicts and comparisons between the ways of signifying rational numbers in School Mathematics and the ways of signifying rational numbers in Academic Mathematics, we are proposing a model for rethinking the mathematical education for (future) teachers.

Palavras-chave: Mathematics Education. Set of tasks. Mathematics Teacher Education. Field of rational numbers.

1 Introdução

A proposta de um dossiê temático sobre *Produtos Educacionais e Educação Matemática* pela revista BoEM (Boletim online de Educação Matemática) faz parte de um momento em que a elaboração de produtos educacionais vem sendo valorizada em diversos âmbitos da pesquisa científica na área de Ensino da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Em particular, os mestrados profissionais na área de Ensino são, já em sua concepção, um contexto rico para desenvolvimento desses produtos, uma vez que estes são obrigatórios no trabalho de conclusão do curso. Segundo o Documento de Área de 2013, esse produto educacional pode ser, por exemplo, “uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição etc” (BRASIL, 2013, p. 25).

Entretanto, a preocupação em se produzir esses materiais não se restringe aos mestrados profissionais. Os programas de pós-graduação acadêmicos também podem se debruçar a este fim. Basta ver que este quesito tem sido considerado (item 4.3 do Quesito 4 acadêmico) na Avaliação Quadrienal da Capes para programas acadêmicos da área de Ensino:

> A pontuação da produção educacional nos programas acadêmicos será feita conforme a metodologia praticada na avaliação de 2013, para efeito de comparação da evolução do percentual de pontuação em produção bibliográfica e técnica. Tal procedimento considera a atribuição de *5 ou 10 pontos* segundo as categorias dos *produtos educacionais registrados*, como descrito no documento de classificação de produtos educacionais. (p. 60, destaque nosso).

Outro indicador que acena para esse momento favorável de elaboração de produtos educacionais está apresentado em Barbosa e Oliveira (2015), quando os pesquisadores discutem a chamada Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática. Segundo esses autores, muitas vezes, a pesquisa em Educação Matemática é “acusada de não responder aos problemas prioritários de gestores, professores, legisladores, etc.” (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527-528). É comum, em diversas pesquisas, que se levante e se identifique um problema no âmbito do ensino de matemática, mas sem propor alguma alternativa ou indicar caminhos possíveis de serem investigados visando uma efetiva mudança que se almeja. Uma vez identificado um problema, o que fazer? Barbosa e Oliveira (2015) apontam que, identificado o problema, o propósito da Pesquisa de Desenvolvimento (PD) é gerar uma intervenção que se materialize em algum tipo de produto educacional que, após análises e refinamentos, possa ser utilizado por outras pessoas.

É nesse contexto que nos inserimos. Temos discutido e pesquisado (ELIAS, 2017; ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017) sobre problemas da formação matemática de professores, em especial, a álgebra na formação inicial de professores, debatendo o distanciamento entre a álgebra veiculada em cursos de Licenciatura em Matemática e a álgebra que efetivamente se conecta com a prática docente do professor na Educação Básica. Em particular, temos direcionado nossos esforços a investigar o ensino da estrutura algébrica corpo, buscando produzir compreensões sobre como o corpo dos números racionais pode ser abordado em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais na Educação Básica.

Na tese de doutorado acadêmico[1] de Elias (2017), delineamos um conjunto de três tarefas para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de formação inicial de professores. Esse delineamento, que se constitui como a primeira versão de nosso produto educacional, foi publicado também em Elias, Savioli e Ribeiro (2017) e sugere uma reorganização dos papeis dos números racionais e da estrutura algébrica corpo na formação inicial de professores.

No presente artigo, não temos como propósito principal apresentar esse produto educacional (o conjunto de tarefas), uma vez que o mesmo já está publicado em Elias, Savioli e Ribeiro (2017). Nosso objetivo central agora é *apresentar e discutir o processo de construção do produto educacional para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática, bem como sinalizar a necessidade de dar continuidade no refinamento deste produto, a fim de compor um conjunto de Tarefas de Aprendizagem Profissional no contexto de formação inicial de professores de matemática*. É importante destacar que o processo de construção do produto educacional que trazemos no presente artigo não foi abordado em Elias, Savioli e Ribeiro (2017), já que o foco deste último foi problematizar o currículo da formação inicial de professores de Matemática.

Pensamos que, compartilhar com a comunidade acadêmica o processo de construção desse conjunto de tarefas, valorizando o processo e não somente o produto final, seja relevante na medida em que outras pesquisas que se propuserem a elaborar produtos educacionais com propósitos semelhantes aos nossos, possam conhecer um caminho já percorrido por outros pesquisadores. Acreditamos, ainda, que o modelo de construção desse conjunto de tarefas tem potencial para contribuir com a discussão sobre o desenvolvimento de produtos educacionais destinados a uma formação matemática de professores que seja mais conectada com a futura prática docente do professor na Educação Básica.

[1] Fazemos referência ao doutorado acadêmico considerando que, em 23 de março de 2017, foi lançada a Portaria n° 389, do Ministério da Educação, que institui, no âmbito da pós-graduação stricto sensu, as modalidades de mestrado e doutorado profissional. A modalidade de mestrado profissional já existia, a novidade trazida por essa portaria é o doutorado profissional.

Assim sendo, o presente artigo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção, explicitamos as bases teóricas e metodológicas que fundamentaram a construção do produto educacional, bem como o apresentamos em partes. Na sequência, uma seção específica para tratar do processo de construção, detalhando o trajeto e explicitando como cada uma das fontes de dados foram, de alguma forma, relevantes para a produção das tarefas. Na seção posterior, destacamos algumas possibilidades e limitações do produto educacional produzido. Por fim, tecemos algumas considerações finais, indicando quais foram nossas intenções ao propor um conjunto de tarefas para a formação inicial de professores.

2 Apresentando o produto educacional

2.1 Bases teóricas

Barbosa e Oliveira (2015) argumentam em favor de uma maior a adoção da Pesquisa de Desenvolvimento[2] na Educação Matemática. Por Pesquisa de Desenvolvimento, os autores referem

> àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões. Por delineamento, entendemos a elaboração do artefato em sua primeira versão; o desenvolvimento, por sua vez, refere-se ao processo contínuo de seu refinamento por meio da avaliação sistemática. (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Na medida em que se compreende que a atenção dada aos números racionais na Licenciatura em Matemática não tem sido suficiente para preparar o futuro professor para as demandas da prática (DAMICO, 2007; ELIAS, 2017), realizar investigações que envolvam o delineamento de artefatos para posterior

[2] A expressão “pesquisa de desenvolvimento” utilizada por Barbosa e Oliveira (2015) é uma tradução de *Design-Based Research* (DBR), uma modalidade de investigação que há algum tempo vem sendo desenvolvida por diferentes pesquisadores. Plomp (2009), por exemplo, é uma das pesquisas que fundamenta o trabalho de Barbosa e Oliveira (2015).

desenvolvimento e avaliação se coloca como uma necessidade para a Educação Matemática.

Foi nesse sentido que produzimos um conjunto de tarefas como produto de toda a investigação realizada por Elias (2017) sobre o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática, com vistas a sugerir alternativa aos problemas relativos à desconexão entre a matemática veiculada em cursos de formação de professores e aquela demandada na prática docente na Educação Básica.

Até o presente momento, limitamo-nos ao que Barbosa e Oliveira (2015) chamam de delineamento, isto é, a elaboração de uma primeira versão do artefato, uma versão que ainda passará por refinamentos e avaliações. Nesse sentido, não estamos comprometidos, ao menos nesse momento, com as características da Pesquisa de Desenvolvimento (PD), por mais que nos inspiremos nela.

Barbosa e Oliveira (2015) apontam para a característica cíclica da PD, efetivada por meio da relação entre o entendimento teórico e o desenvolvimento do produto educacional. Explicamos: o ponto de partida para a elaboração de um produto educacional, na perspectiva da PD, é a teoria e os resultados de estudos prévios obtidos na literatura científica, produzindo um primeiro entendimento acerca do problema. Esse primeiro entendimento serve de subsídio para o delineamento da primeira versão do produto educacional, que será utilizado e submetido à análise, gerando um segundo entendimento sobre o problema. O segundo entendimento serve para refinar a versão inicial do produto educacional, levando-o à sua segunda versão. Esses ciclos de testes e refinamentos se repetem até chegar a uma saturação, isto é, até que os dados produzidos ofereçam uma base suficiente que justifique a finalização dos ciclos.

Sem entrar nos pormenores da PD, construímos um produto educacional (entendimento e delineamento da primeira versão) com vistas a realizar novos ciclos de entendimento e delineamento futuros, tal como orienta a PD. Todo o desenvolvimento realizado até esse momento se configura como o primeiro entendimento do problema posto inicialmente – o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática – e o que apresentamos nesse texto representa o delineamento da primeira versão de nosso produto educacional, um conjunto de tarefas para formação inicial de professores.

A compreensão que temos sobre tarefa está fundamentada no trabalho de Ponte et al. (2015), quando afirmam que no “ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito [o de tarefas] é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos” (p. 111).

As tarefas que elaboramos, enquanto ferramentas que medeiam o ensino e a aprendizagem da matemática, têm o relevante papel de contemplar diferentes significados dos números racionais e buscar promover ações e reflexões nos estudantes. Elaborar tarefas com potencial para dar origem a diversas atividades é, portanto, um trabalho cuidadoso que demanda diferentes entendimentos e delineamentos, no sentido da PD.

Antes de encerrar essa seção, destacamos três referenciais teóricos que fundamentaram a tese de Elias (2017) e, consequentemente, embasam o conjunto de tarefas que aqui apresentamos.

Para discutir sobre a formação matemática do professor, assumimos a diferenciação entre Matemática Acadêmica e Matemática Escolar de Moreira e David (2010). Segundo esses autores, a Matemática Acadêmica é tida como “um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais” (p. 20). Já a Matemática Escolar é entendida como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA; DAVID, 2010).

Para conhecer diferentes significados dos números racionais, a abordagem dos Perfis Conceituais (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009; MORTIMER et al, 2014) nos fundamentou. A teoria dos Perfis Conceituais toma como pressuposto o fato de que as pessoas apresentam diferentes modos de conceber e representar o mundo, expondo diferentes modos de pensar, usados em diferentes contextos.

Assim, conceitos científicos que sejam polissêmicos, como é o caso dos números racionais, admitem a construção de um perfil conceitual, o qual tem o papel de modelar essa heterogeneidade dos modos de pensar e formas de falar sobre tais conceitos.

Por fim, para tratar dos conhecimentos profissionais docentes, discutindo a relação entre os diferentes modos de pensar e formas de falar sobre os números racionais ao longo de toda a Educação Básica e, também, fora do contexto escolar, focamos no chamado Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), na perspectiva de Jakobsen et al. (2012). O HCK para esses autores é uma orientação para e uma familiaridade com a disciplina (ou disciplinas) que contribuem para o ensino da disciplina escolar à disposição, proporcionando aos professores um sentido de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo.

2.2 Escolhas metodológicas

Este artigo, bem como a tese de doutorado que originou o produto educacional, pauta-se em uma abordagem metodológica que segue os preceitos da pesquisa qualitativa (Esteban, 2010), em uma perspectiva teórica interpretativa (Crotty, 1998).

O princípio básico para a elaboração do produto educacional foi o de buscar se estabelecer paralelos entre os modos de significar os números racionais na Matemática Escolar e os modos de significar os números racionais na Matemática Acadêmica. Assim, para possibilitar uma compreensão sobre como abordar os números racionais (em especial, o corpo dos números racionais) na formação inicial de professores que considerasse tal pressuposto, adotamos a seguinte organização: para todo tipo de fonte de dados utilizada para se conhecer os números racionais na Matemática Escolar, adotava-se uma outra fonte, de mesma natureza, que contemplasse os números racionais na Matemática Acadêmica.

Para os números racionais na Matemática Escolar, as fontes de dados utilizadas foram: uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental (CHAVANTE, 2015a, 2015b, 2015c); entrevistas com quatro professores da Educação Básica; pesquisas acadêmicas que envolvessem os números racionais no contexto escolar (por exemplo, ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983; KIEREN, 1976).

Para os números racionais na Matemática Acadêmica, utilizamo-nos das seguintes fontes de dados: livros didáticos para o Ensino Superior (por exemplo, DOMINGUES, 2009; NIVEN, 1984; CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984; GONÇALVES, 2001); entrevistas com três professores formadores que atuam ou atuaram com disciplinas que tratam das estruturas algébricas na formação inicial de professores; pesquisas acadêmicas que envolvessem os números racionais na Matemática Acadêmica (WASSERMAN, 2014, 2016; DAMICO, 2007).

Foram a partir das fontes de dados acima indicadas, assim como dos referenciais teóricos apresentados anteriormente, que desenvolvemos nosso trabalho de análises o qual nos permitiu construir o conjunto de tarefas. Considerando que o produto educacional na íntegra já está publicado (ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017), na próxima seção nosso foco passa a ser a descrição das tarefas e seu processo de construção, trazendo trechos delas para ilustrar com mais detalhes o processo de idealização.

2.3 Descrevendo o produto educacional

O produto educacional é composto por 3 tarefas e cada uma delas possui itens e subitens. Com seis itens, a Tarefa 1, intitulada *Explorando diferentes significados dos números racionais*, tem como objetivo conhecer e explorar alguns modos de pensar os números racionais (como as ideias de parte-todo, medida, operador, razão etc.) que já foram internalizados pelos licenciandos enquanto estudantes da Educação Básica e sujeitos de uma determinada cultura, bem como discutir situações em que outros significados, para além daqueles já conhecidos, possam surgir.

Dessa forma, a Tarefa 1 resgata diferentes modos de pensar os números racionais que são característicos da Matemática Escolar e busca gerar discussões do ponto de vista de seu ensino. Faz parte da tarefa propor investigações sobre contextos nos quais os números racionais podem aparecer ao longo da Educação Básica, debatendo diferentes temas matemáticos a partir dos quais os números racionais podem ser significados, na tentativa de promover uma familiaridade com a disciplina que contribua para o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino da Matemática Escolar.

O item C[3] desta Tarefa 1, por exemplo, propõe, de uma maneira bem simples, um debate entre os futuros professores a respeito dos diferentes significados dos números racionais: "O que você pode dizer sobre $\frac{5}{6}$? Comente com seus colegas o que esse número pode indicar ou representar" (ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017, p. 199).

Além disso, buscamos, a todo momento, colocar os licenciandos em uma posição de professor, simulando situações que podem acontecer em sala de aula, como no caso do item A da Tarefa 1: "Suponha que você seja professor de uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental. Nesse contexto, seus estudantes já tiveram experiências com alguns casos envolvendo frações e números decimais. Como você faria, nessa turma de 7º ano, para introduzir o conceito de número racional?" (ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017, p. 199). Nesse item da Tarefa 1, é possível que os licenciandos realizem pesquisas para conhecer as maneiras como os números racionais em suas representações fracionária e decimal já foram abordados antes do sétimo ano. Ter consciência do passado e do futuro do assunto sobre o qual está ensinando é uma das características do HCK.

A Tarefa 2, intitulada *Apresentando os números racionais na Matemática Acadêmica*, tem como objetivo apresentar a construção lógico-formal dos números racionais enquanto classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, além de explorar a coletividade dos axiomas (WASSERMAN,

[3] Esse item foi adaptado de Onuchic e Allevato (2008).

2014), fazendo emergir a estrutura algébrica corpo. Essa tarefa visa trazer para a discussão entre os licenciandos em sala de aula os números racionais na Matemática Acadêmica. Sua apresentação logo na sequência da Tarefa 1 tem uma razão: contrastar as naturezas distintas entres os modos de pensar os números racionais na Matemática Acadêmica e na Matemática Escolar. Debater essa natureza distinta com os licenciandos pode evitar a compactação de diferentes significados do conceito de número racional em um único e formal modo de pensar, uma vez que os mesmos terão a oportunidade, com a mediação do professor formador, de estabelecer o valor pragmático de cada significado.

Os itens A e B da Tarefa 2 se dedicam a discutir a construção lógico-formal dos números racionais bem como definir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, mostrando que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, munido das operações de adição e de multiplicação, gozam de certas propriedades[4].

O último item da Tarefa 2, o item C, busca explorar a coletividade dos axiomas (WASSERMAN, 2014), fazendo emergir a estrutura algébrica corpo. Tal item, dividido em seis subitens, está enunciado da seguinte maneira:

> **C**. Considere a equação $4x + 5 = 6$.
> i) Encontre a solução dessa equação e comente que número é esse.
> ii) Explique, detalhadamente, cada passo utilizado para chegar à solução.
> iii) Suponha que o enunciado fosse: "Resolva a equação $4x + 5 = 6$ em $\mathbb{Z}$", qual seria sua resposta? Comente com seus colegas.
> iv) É possível estabelecer alguma relação entre esses passos realizados para resolver a equação do primeiro grau de uma incógnita dada e as propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$?
> v) Se, por exemplo, não existissem as propriedades associativa para a adição e a associativa para a multiplicação em $\mathbb{Q}$, seria possível resolver a equação dada?
> vi) São as propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ que permitem resolver uma equação polinomial de primeiro grau de uma incógnita do tipo $ax + b = c$ ($b, c \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^*$). Juntas, essas propriedades possibilitam o passo a passo que conduz ao número racional que é solução daquela equação. Se alguma dessas propriedades não fosse válida, a resolução da

[4] Propriedades da operação de adição: associativa, comutativa, existência de elemento neutro da adição, todo elemento $a \in \mathbb{Q}$ possui simétrico aditivo. Propriedades da operação de multiplicação: associativa, comutativa, existência de elemento neutro da multiplicação, todo elemento $a \in \mathbb{Q}$ ($a \neq 0$) possui simétrico multiplicativo.

> equação não caminharia. Isso significa que, no caso da resolução de equações como essa que está sendo mencionada, a coletividade das propriedades deve ser valorizada. Essa coletividade está associada ao que chamamos de estrutura algébrica. Uma estrutura algébrica é um conjunto (numérico ou não) munido de uma ou duas operações (que podem ser as conhecidas adição e multiplicação, mas podem ser outras) e que goza de algumas propriedades (ou axiomas). Os números racionais, munidos das operações de adição e multiplicação, gozam das propriedades apresentadas no item B- i, ii e iii, constituindo uma estrutura algébrica chamada *corpo*. Em uma notação matemática, dizemos que $(\mathbb{Q},+,.)$ é o corpo dos números racionais. Investigue, em diferentes livros de Álgebra, como *corpo* é definido e responda as questões abaixo.
> **a)** Há diferenças nessas definições da estrutura algébrica corpo apresentadas nos livros consultados?
> Discuta com os demais colegas o que você compreendeu sobre o objeto "estrutura algébrica corpo". (ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017, pp. 202-203).

Esse item da Tarefa 2, em particular, visa trabalhar os números racionais em um contexto matemático bastante familiar dos licenciandos: a resolução de equações de primeiro grau. Por este motivo, entendemos que os subitens *i* a *v* podem ser deixados mais a cargo dos licenciandos e das discussões geradas por eles.

Já o subitem *vi* exigirá a ação direta do professor formador, conduzindo a discussão, trabalhando com o auxílio de livros de Álgebra e fazendo emergir a estrutura corpo, a partir do estudo das propriedades das operações de adição e de multiplicação sobre $\mathbb{Q}$. É desejado que o professor formador consiga discutir com os licenciandos a característica abstrata do objeto matemático corpo, um objeto matemático construído a partir de três noções já conhecidas pelos licenciandos: conjunto, operações e propriedades.

A Tarefa 3, intitulada *Problematizando os números racionais na Matemática Acadêmica a partir dos números racionais na Matemática Escolar*, tem como objetivo problematizar a Matemática Acadêmica com vistas ao conhecimento matemático para o ensino dos números racionais, buscando explicitar a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar como diferentes práticas sociais situadas em contextos distintos, mas que se complementam. Essa tarefa busca levantar maiores questionamentos sobre como os números racionais na

Matemática Acadêmica podem ser pertinentes ao conhecimento matemático do futuro professor.

Nesse sentido, os três itens que constituem a Tarefa 3 têm papel fundamental para o conjunto de tarefas, na medida em que colocam em conflito os modos de significar os números racionais na Matemática Escolar e os modos de significar os números racionais na Matemática Acadêmica, princípio básico para a construção de nosso produto educacional. O item A, por exemplo, problematiza o papel da construção lógico-formal dos conjuntos numéricos para a formação matemática do professor.

> **A.** Com base no que fora discutido no item A da Tarefa 2, novos questionamentos podem ser feitos e debatidos entre vocês:
> i) O que significa uma *construção lógico-formal* dentro dessa matemática que você está aprendendo? Além das construções dos conjuntos numéricos, você teve contato com outra construção dessa natureza até o momento em seu curso?
> ii) Uma construção desse tipo é feita na Educação Básica para ensinar os números inteiros ou os racionais? Discuta com os demais colegas sobre a diferença de abordagens sobre/para os números racionais que vocês estão vendo agora e a forma tratada na Educação Básica.
> iii) Nesse contexto da construção formal dos números racionais, um número racional é uma classe de equivalência e, como vocês já viram, uma classe de equivalência é um conjunto. Para vocês, faz sentido um número racional ser um conjunto, por exemplo, $\frac{1}{2} = \{(1,2), (-1,-2), (2,4), (-2,-4), \ldots\}$? Na Tarefa 1, item D-i, vimos uma forma de significar os números racionais: número racional é uma variação de uma grandeza em relação a outra. Ou seja, em D-i, um número é uma relação entre grandezas. Afinal, o que é um número racional? (ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017, pp. 203-204, destaque dos autores).

Nesse item, a ideia é que os futuros professores compreendam um pouco da forma de ser da Matemática Acadêmica, enquanto um sistema lógico-formal-dedutivo, cujas construções são pautadas em axiomas e definições que, de uma maneira lógico-dedutiva, levam a demonstrações de teoremas e proposições, permitindo a construção de novos conhecimentos matemáticos. Por outro lado, na

Matemática Escolar, o convencimento[5], muitas vezes, é suficiente para que um estudante aceite a validade de um resultado. No item iii, por exemplo, observa-se que, explorar a ideia de que um número racional, dentro da Matemática Acadêmica, perde seu sentido intuitivo e ganha um sentido abstrato, deixando, cada vez mais, de importar um significado particular (a parte de um todo, por exemplo).

No item C da Tarefa 3, busca-se gerar reflexões sobre os números racionais comparando-os com os números inteiros, tanto em termos da construção lógico-formal de ambos os conjuntos numéricos, como em termos de estrutura algébrica (corpo e anel).

> **C**. Na Tarefa 2 item C, foi apresentada a você a estrutura algébrica corpo e, junto a ela, o corpo dos números racionais.
> i) Considerando que você já conhece a construção lógico-formal dos inteiros, o que se pode dizer sobre a afirmação “$(\mathbb{Z}, +, .)$ não é um corpo”? Discuta com o restante da sala e justifique sua resposta.
> ii) Levando em conta a ideia de estrutura algébrica (tomando as operações usuais de adição e multiplicação), quando passamos de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$, que propriedades são mantidas e que propriedades são incluídas?
> iii) Note que, na extensão de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ não basta acrescentar somente os inversos multiplicativos dos inteiros, é preciso acrescentar vários outros elementos, como $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$ etc. A inserção desses outros elementos é necessária para manter a consistência da estrutura de corpo, a partir dessa ampliação dos inteiros. Discuta com os demais colegas que consistência é essa que se busca, ao acrescentar esses elementos que não são inversos de números inteiros, na passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$.
> iv) Na passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$, acrescentar os inversos multiplicativos dos números inteiros, bem como outras frações do tipo $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$), implica em outras diferenças entre esses dois conjuntos.
> **a)** O que se pode dizer sobre a ideia de antecessor e de sucessor no conjunto dos números inteiros e no conjunto dos números racionais? Compare essas ideias entre os conjuntos.

[5] O termo convencer foi inspirado em Tall (1991), quando afirma que a passagem de uma matemática mais elementar para uma matemática mais avançada envolve uma transição importante que corresponde à passagem da descrição à definição, do convencer ao provar de uma forma lógica baseada em definições.

b) Com base na discussão do item a, o que se pode dizer sobre a afirmação “Entre dois números racionais quaisquer (mesmo muito próximos) sempre existe outro número racional”. Essa afirmação também é válida quando tratamos de números inteiros?
v) Existe algum outro conjunto munido de duas operações que constituem o que estamos chamando de corpo? Qual a vantagem em se estabelecer uma estrutura algébrica sobre um conjunto que já é conhecido, como é o caso do corpo dos números racionais?
vi) Discuta com seus colegas essa forma de fazer matemática, que é característica da Matemática Acadêmica, e compare-a com a forma de fazer matemática da Matemática Escolar. (ELIAS; SAVIOLI; RIBEIRO, 2017, pp. 204 - 205).

Neste item, procuramos, principalmente, abordar a consistência algébrica. Por exemplo, no subitem iii, o professor formador pode debater com os licenciandos o fato de que, se não fossem incluídas as outras frações de inteiros que não apenas os inversos multiplicativos dos inteiros, poderíamos ter o seguinte caso: tomando os elementos 2 e $\frac{1}{3}$ de $\mathbb{Q}$, a multiplicação entre esses elementos não resultaria em um elemento de $\mathbb{Q}$, logo a multiplicação não seria uma operação em $\mathbb{Q}$, já que não haveria a propriedade do fechamento. Assim, para manter a consistência algébrica, essas outras frações de inteiros precisam ser incluídas. Trazer a consistência algébrica para o centro da discussão é relevante inclusive para a Matemática Escolar, pois explicita alguns modos de ser da matemática, deixando claro que algumas escolhas são desse modo, e não de outro, pelo simples fato de fazer sentido dentro da matemática.

3 O processo de construção do produto educacional

Separamos o processo de construção do conjunto de tarefas em três momentos, em que cada um deles o foco de investigação era dado a uma determinada fonte de dados, deixando as outras duas fontes, momentaneamente, como coadjuvantes.

No primeiro momento, tomamos os livros didáticos como fonte norteadora dos temas a serem considerados, uma vez que víamos nos livros uma boa

http://dx.doi.org/10.5965/2357724X06112018098

orientação da distribuição e na maneira de abordar o conteúdo em questão. No segundo momento, o foco estava nas entrevistas, buscando as reflexões e significados atribuídos pelos professores (da Educação Básica e do Ensino Superior). No terceiro e último momento, as pesquisas passaram a ser o centro das discussões, buscando complementar as discussões já feitas ou levantar outras questões ainda não discutidas nos dois momentos anteriores. Esse procedimento está ilustrado na Figura 1.

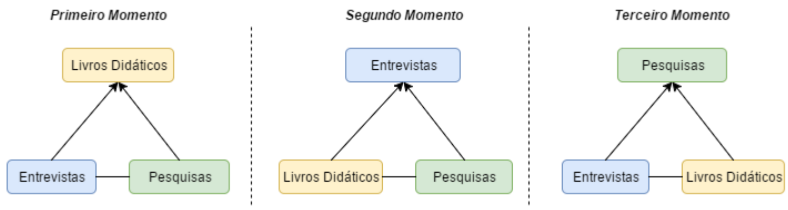

Figura 1: Estrutura das Análises. **Fonte:** Elias (2017, p. 137)

Realizamos leituras iniciais dos livros didáticos, das entrevistas transcritas e das pesquisas selecionadas para retirarmos os trechos que compuseram as unidades a serem analisadas. Dessas unidades, aprofundamos as análises por meio do que chamamos de *Reflexões*[6], as quais foram geradas a partir de nossas interpretações sobre os dados e estavam intrinsicamente entrelaçadas com os referenciais teóricos assumidos.

Como afirmamos, os livros didáticos foram utilizados como um recurso norteador para nos dar subsídios na busca por articulações entre os números racionais na Educação Básica e o corpo dos números racionais no Ensino Superior. A organização e as discussões propostas na Tarefa 2, por exemplo, foram pautadas no que os livros voltados para o Ensino Superior apresentam

[6] As *Reflexões* são as análises realizadas em Elias (2017). Foram produzidas 31 *Reflexões*, destacadas na forma de quadros numerados, que tiveram as funções de, por um lado, dissertar sobre o tema em questão e, por outro, preparar o campo para construção do conjunto de tarefas propostas. Seria inviável apresentá-las neste texto, pela quantidade e pelo tamanho de cada quadro. Contudo, essas *reflexões* são uma etapa importante da construção do produto educacional.

sobre a construção lógico-formal dos números racionais. Apenas o item C da Tarefa 2 é que foi inteiramente inspirado por Wasserman (2014, 2016).

As pesquisas na área de Educação Matemática nos permitiram tomar conhecimento sobre o que a Educação Matemática tem produzido a respeito dos números racionais, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior (especialmente na Licenciatura em Matemática). Nesse sentido, as pesquisas científicas foram uma fonte de enunciados já validados que puderam compor o conjunto de tarefas aqui proposta. Por exemplo, a Tarefa 1 foi quase inteiramente elaborada com base nessas pesquisas.

As entrevistas com os professores[7] foram a principal fonte de inspiração para a elaboração das tarefas, no sentido de fugir do modelo tradicional apresentado pelos livros didáticos. Os quatro professores da Educação Básica nos trouxeram características relevantes sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais em diversas formas e contextos da Educação Básica. Por outro lado, os três professores formadores, ao compartilharem conosco suas práticas em sala de aula, nos permitiram problematizar o ensino do corpo dos números racionais da maneira como desejávamos. Isso está explicitado em toda a Tarefa 3.

4 Possibilidades e limitações do Produto Educacional

Uma limitação que identificamos em nosso produto educacional, no formato atual em que se apresenta, é o fato de que o conjunto de tarefas ainda não foi levado para salas de aula de cursos de Licenciatura em Matemática e discutida com futuros professores de matemática para conseguirmos avaliar seu potencial e/ou necessidades de reformulações. Utilizar o conjunto de tarefas em sala de aula, com futuros professores, é o próximo passo para darmos continuidade aos

[7] O critério de escolha para os professores da Educação Básica era o tempo de atuação no magistério (ter mais de 20 anos de prática docente) e, para os professores do Ensino Superior era que estivesse atuando ou já tivesse atuado em cursos de Licenciatura em Matemática, mais precisamente no ensino das estruturas algébricas.

ciclos da pesquisa de desenvolvimento. Outra limitação a ser destacada refere-se ao fato de que o conjunto de tarefas não encerra o tema números racionais na formação inicial do professor; essas tarefas devem ser encaradas como parte integrante de uma disciplina que busca abordar o ensino desses números (e dos demais conjuntos numéricos) em sua completude.

Apesar disso, entendemos que o produto educacional que desenvolvemos ilustra um modo de organizar o currículo na formação inicial de professores. Esse modo que propomos, por meio do conjunto de tarefas, coloca a Matemática Escolar como aquilo a ser tratado, o objeto de estudo, deixando a Matemática Acadêmica como um meio para problematizar essa Matemática Escolar. Isso, em nosso entendimento, permite que se tome ambas as matemáticas como práticas sociais situadas, com objetivos distintos, mas que, uma vez estabelecidas suas diferenças, podem favorecer o conhecimento matemático para o ensino.

Uma possibilidade eminente que enxergamos em nosso produto educacional, enquanto tarefas com características mais matemáticas, é ampliá-las com um conjunto de tarefas de outras naturezas (episódios de ensino, ou trechos de explicações orais ou escritas de estudantes acerca de suas formas de pensar) de maneira a compor assim o que se entende por Tarefas de Aprendizagem Profissional (SMITH, 2001) no contexto de formação inicial de professores de matemática. Tarefas de Aprendizagem Profissional são tarefas preparadas e organizadas para atingir um objetivo específico para a aprendizagem dos professores (em formação inicial ou continuada), levando em consideração o conhecimento prévio e as experiências que esses professores já têm, seja da Educação Básica enquanto estudante, do próprio curso de Licenciatura em Matemática ou da prática docente na escola. Este também é um desafio que nos propomos a dar continuidade em nossas pesquisas.

5 Considerações finais

Neste artigo, buscamos apresentar e discutir o processo de construção de um produto educacional para a formação inicial de professores que se deu em uma pesquisa de doutorado (ELIAS, 2017). Ao nos empenharmos em elaborar um conjunto de tarefas enquanto um produto educacional, não buscávamos, de modo algum, ser prescritivos, no sentido de apresentarmos uma receita que o professor formador deve seguir para abordar o corpo dos números racionais.

Pelo contrário, ao propor essas tarefas nos impusemos sair da zona de conforto de simplesmente apontar como não deve ser, para entrarmos em campo propositivo. Ao fazer isso, sabemos e esperamos críticas sobre como acreditamos que pode ser um caminho para a formação matemática do licenciando, indicando alternativas àquele modo que identificamos como sendo ineficaz à formação do professor (ELIAS, 2017). As tarefas que construímos são possibilidades para tratar a Matemática Acadêmica em cursos de Licenciatura em Matemática.

Em certa medida, mais importante do que o conjunto de tarefas propriamente dita, é o entendimento de todo o processo de sua produção. Tal processo buscou privilegiar o estabelecimento de diálogo entre diferentes fontes e sempre buscando partir da Matemática Escolar para discutir aspectos da Matemática Acadêmica. Isso, em nosso entendimento, mostrou-se como um modelo possível e, em certa medida, recomendável para se produzir novos conhecimentos a respeito da matemática na formação do professor. O que temos visto frequentemente, e isso ficou evidente em Elias (2017), é justamente um movimento inverso: primeiramente é abordada a Matemática Acadêmica nos cursos de formação de professores para depois, quando se faz, buscar-se articulações com a Matemática Escolar. Enfatizamos que, inadequadamente, muitas vezes o exercício de buscar tais articulações é deixado a cargo dos licenciandos para quando ingressarem na profissão. Para reverter essa situação, acreditamos que pesquisas que tenham como resultado a produção de produtos educacionais seja um caminho possível.

Referências

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande, v. 8, número temático, 2015.

BRASIL. CAPES. *Documento de Área – Ensino*. 2013. Disponível em: https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs_de_area/Ensino_doc_area_e_comiss%C3%A3o_block.pdf. Acesso em 13 nov. 2017.

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and process*. New York: Academic Press, 1983. p.91-126.

CARVALHO, M. S; LOPES, M. L. M. L.; SOUZA, J. C. M. *Fundamentação da Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: Câmpus, 1984.

CHAVANTE, E. R. *Convergências*: Matemática, 6º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015a. (Coleção Convergências).

CHAVANTE, E. R. *Convergências*: Matemática, 7º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015b. (Coleção Convergências).

CHAVANTE, E. R. *Convergências*: Matemática, 8º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015c. (Coleção Convergências).

CROTTY, M. *The fundations of social research*: meaning and perspective in the research process. Londres: SAGE, 1998.

DAMICO, A. *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

ELIAS, H. R. *Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática*. 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR, 2017.

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. das D.; RIBEIRO, A. J. Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.19, n. 3, p.182-208, 2017.

ESTEBAN, M. P. S. Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2010.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

JAKOBSEN, A. et al. Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In: ICME (Ed.), *12th International Congress In Mathematics Education*. Seoul (Coreia): ICME, 2012, p. 4635-4644.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.) *Number and measurement*: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p.101-144.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor*: Licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, 11).

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P.; EL-HANI, C. N. Bases teóricas e epistemológicas da abordagem dos perfis conceituais. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências, VII, 2009. *Anais*... Florianópolis: ABRAPEC, 2009.

MORTIMER, E. F. et al. Conceptual Profiles: Theoretical - Methodological Bases of a Research Program. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds) *Conceptual Profile*: a theory of teaching and learning scientific concepts. New York: Springer, 2014.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 1984.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 79-102, 2008.

PLOMP, T. Educational design research: An introduction. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Ed.). *An Introduction to Educational Design Research*. Enschede: SLO-Netherlands Institute for Curriculum Development, 2009. p. 9-35.

PONTE, J. P. et al. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, v. 24, n. 2, 2015.

SMITH, M. S. *Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: D. TALL (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer, 1991.

WASSERMAN, N. H. Introducing Algebraic Structures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers, *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, Filadélfia, v. 24, n. 3, p. 191-214, 2014.

WASSERMAN, N. H. Abstract Algebra for Algebra Teaching: Influencing School Mathematics Instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, Ontário, v. 16, n. 1, p. 28-47, 2016.